

# L'inégalité isopérimétrique et le théorème de Poincaré

Jean Marie BECKER

15 janvier 2003

Le texte qui suit ne nécessite que des connaissances élémentaires concernant les longueurs, les aires planes et les volumes, rappelées en Annexe. La seule notion nouvelle, que l'on trouvera également en Annexe, est celle de **dilaté d'un ensemble**.

## 1 L'inégalité isopérimétrique

### Théorème 1.1

Si une courbe fermée simple de longueur  $L$  délimite une zone intérieure d'aire  $A$ , alors :

$$4 \pi A \leq L^2$$

avec égalité si et seulement si la courbe est un cercle.

### Preuve 1.1

Cette inégalité est invariante par *similitude* ; nous pouvons donc, par homothétie, supposer que la courbe est de longueur  $L = 2 \pi$ . Paramétrons la courbe par son abscisse curviligne :  $(x(s), y(s))$  ( $0 \leq s \leq 2\pi$ ). Tout revient alors à établir que :

$$A \leq \pi \tag{1}$$

L'invariance par similitude nous autorise également, sans nuire à la généralité, à translater la courbe en sorte que  $\int_0^{2\pi} x(s) ds = 0$ .

Nous avons maintenant besoin d'un résultat intermédiaire :

### Lemme 1.1

Soit  $f$  une fonction  $C^1$   $2\pi$ -périodique telle que  $\int_0^{2\pi} f(t) dt = 0$ , alors

$$\int_0^{2\pi} f'(t)^2 dt \geq \int_0^{2\pi} f(t)^2 dt$$

avec égalité si et seulement si  $f(t)$  est de la forme  $\alpha \cos(t - \varphi)$  ( $\alpha$  et  $\varphi$  quelconques).

### Preuve 1.2 ( du lemme)

On décompose  $f$  en série de Fourier :

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \quad (\text{puisque } a_0 = 0)$$

D'où, par dérivation terme à terme :

$$f'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k(b_k \cos kt - a_k \sin kt).$$

Ces deux décompositions donnent respectivement, d'après l'identité de Parseval :

$$\begin{cases} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)^2 dt = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \\ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f'(t)^2 dt = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (a_k^2 + b_k^2) \end{cases}$$

D'où :

$$\int_0^{2\pi} f'(t)^2 dt - \int_0^{2\pi} f(t)^2 dt = \pi \sum_{k=1}^{\infty} (k^2 - 1)(a_k^2 + b_k^2)$$

qui est  $\geq 0$ , comme annoncé.

Il reste à envisager le cas d'égalité ; le second membre de l'identité précédente est nul si et seulement si tous les  $a_k$  et  $b_k$  sont nuls pour  $k \geq 2$ , autrement dit si et seulement si :

$$f(t) = a_1 \cos t + b_1 \sin t = \alpha \cos(t - \varphi)$$

pour certains coefficients  $a_1$  et  $b_1$ , ou bien  $\alpha$  et  $\varphi$ . Ceci achève la démonstration du lemme.

Le résultat (1) découle alors de l'identité suivante :

$$\underbrace{\int_0^{2\pi} (x'^2(s) + y'^2(s)) ds}_{= 2\pi \times 1 \text{ (voir Annexe)}} - 2 \underbrace{\int_0^{2\pi} x(s)y'(s) ds}_{= A \text{ (voir Annexe)}} = \underbrace{\int_0^{2\pi} (x'^2(s) - x^2(s)) ds}_{\geq 0 \text{ (lemme)}} + \underbrace{\int_0^{2\pi} (x(s) - y'(s))^2 ds}_{\geq 0}$$

Le cas d'égalité  $A = \pi$  a lieu si et seulement si les deux intégrales du second membre sont nulles, c'est-à-dire si et seulement si :

- d'une part, l'on est dans le cas d'égalité du lemme (à savoir  $x(s) = \alpha \cos(s - \varphi)$ ).
- et que l'on a, de plus :  $y'(s) = x(s)$  pour tout  $s$ , ce qui entraîne  $y(s) = \alpha \sin(s - \varphi) + c$ .

Ce qui veut dire que le point  $(x(s), y(s))$  décrit alors un cercle.

## 2 Applications aux paramètres de forme

1) Posons

$$C = \frac{4\pi A}{L^2}$$

d'après l'inégalité isopérimétrique :  $C \in ]0, 1]$ . On utilise  $C$  comme *paramètre de circularité*, invariant par similitude. Plus  $C$  est proche de 1, plus la courbe est "considérée comme circulaire". On pourra se servir du coefficient  $C$  même si la courbe n'est pas partout différentiable, par exemple pour des polygones. Ainsi, pour un polygone régulier à  $n$  côtés,  $C = \frac{\pi/n}{\tan(\pi/n)}$  ; ce qui donne  $C \simeq 0.6$  pour un triangle équilatéral alors que pour un octogone régulier, on obtient  $C \simeq 0.95$ .

2) Si l'on ne conserve que les coefficients d'indice 0 et 1 des séries de Fourier des fonctions  $x$  et  $y$ , autrement dit, si l'on fait l'approximation suivante :

$$\begin{cases} x(s) \simeq a_0/2 + a_1 \cos s + b_1 \sin s \\ y(s) \simeq \alpha_0/2 + \alpha_1 \cos s + \beta_1 \sin s \end{cases}$$

On obtient une ellipse en tant qu'image, par une transformation affine, du cercle unité. Cette ellipse constitue, pour certaines applications, une approximation intéressante de la courbe (voir Fig. 1) ; de là, peut se déduire un *paramètre d'allongement* de la courbe, égal au rapport du demi-grand au demi-petit axe de l'ellipse.

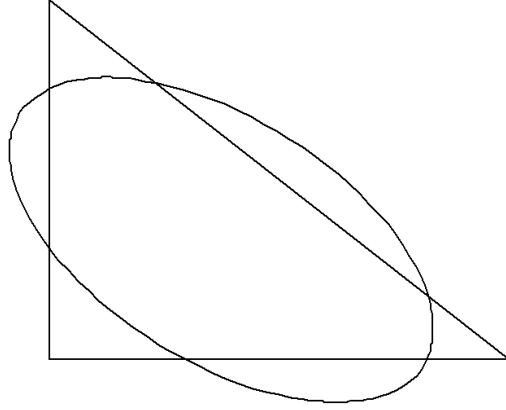


FIG. 1 – “Meilleure approximation” d’une courbe (ici triangulaire) par une ellipse.

### 3 La ”densité cinématique”

Considérons deux courbes paramétrées  $C_0$  et  $C_1$ , non nécessairement fermées ou simples (voir les définitions dans l’Annexe).

Soit  $Z \equiv Z_{C_0 C_1}$  l’ensemble des déplacements  $D_{a,b,\varphi}$  (voir Annexe) tels que :

$$C_0 \cap D_{a,b,\varphi}(C_1) \neq \emptyset$$

Par abus de langage, on peut considérer que ces  $D_{a,b,\varphi}$  “amènent  $C_1$  à couper  $C_0$ ” (voir par exemple la Fig. 2 qui correspond à l’exemple 2 ci-dessous).

Considérons cet ensemble  $Z_{C_0 C_1}$  comme ”zone volumique” de l’espace de représentation  $\mathfrak{E} = \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times [0, 2\pi[$  auxquels appartiennent les triplets  $(a, b, \varphi)$ .

Cette “zone”  $Z_{C_0 C_1}$  est clairement *bornée* dans  $\mathfrak{E}$ . De plus, si une fonction  $n$  est attachée à chaque triplet  $(a, b, \varphi)$  (dans la suite, ce sera toujours la fonction “ $n =$  nombre de points d’intersection de  $C_0$  avec  $D_{a,b,\varphi}(C_1)$ ”), on définira ce que l’on appelle l’**intégrale cinématique** de cette fonction comme étant l’intégrale suivante, (triple, mais on ne met qu’un signe  $\int$ ), étendue à toute la zone  $Z$  de  $\mathfrak{E}$  :

$$\int_Z n \, da db d\varphi \quad (2)$$

(on admet l’intégrabilité de cette fonction sur cette ”zone”).

**Remarque** : ne pas chercher à interpréter séparément le terme “cinématique” : il fait un tout avec le mot ”intégrale cinématique”

**Proposition** : La définition (2) est indépendante de la position relative des courbes  $C_0$  et  $C_1$ .

#### Preuve 3.1

En effet, si l’on considère que  $C_1$  a subi préalablement le déplacement  $D_{a,b,\varphi}$  qui l’a amené en  $C'_1 = D_{a,b,\varphi}(C_1)$ , l’ensemble considéré est celui,  $\mathfrak{E}'$ , des triplets  $(a', b', \varphi')$  tels que :

$$C_0 \cap D_{a',b',\varphi'}(C'_1) \neq \emptyset \quad \iff \quad C_0 \cap D_{a,b,\varphi}(C_1) \neq \emptyset$$

avec les notations de (13).

Différentions les formules (13) (avec, rappelons-le,  $a, b, \varphi$  fixés) :

$$\begin{cases} da'' = da' + (-a \sin \varphi' - b \cos \varphi') d\varphi' \\ db'' = db' + (a \cos \varphi' - b \sin \varphi') d\varphi' \\ d\varphi'' = d\varphi' \end{cases} \quad (3)$$

On en déduit que l'élément différentiel n'est pas modifié :

$$da'' db'' d\varphi'' = 1 \cdot da' db' d\varphi'$$

(jacobien égal à 1), ce qui prouve la proposition.

## 4 Exemples

### Exemple 1 :

Considérons (Fig. 2) le cas où  $C_0$  et  $C_1$  sont deux cercles concentriques, de rayons respectifs  $2R$  et  $R$  (donc de longueurs respectives  $L_0 = 4\pi R$  et  $L_1 = 2\pi R$ ).

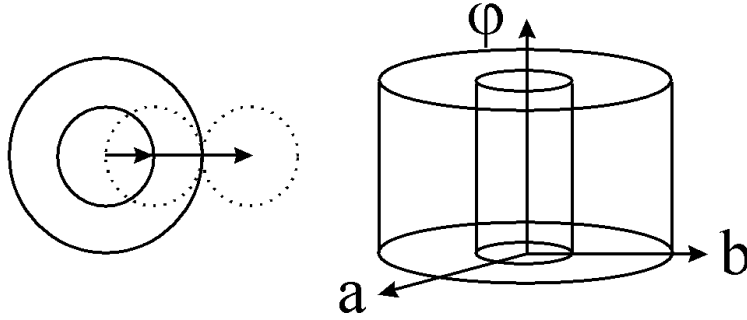


FIG. 2 – Les déplacements  $D_{a,b,\varphi}$  tels que  $D_{a,b,\varphi}(C_1) \cap C_0 \neq \emptyset$  forment une zone cylindrique  $Z \equiv Z_{C_0 C_1}$  dans l'espace  $E$

Aucun de ces deux cercles n'est sensible à une rotation, quelle qu'elle soit. Autrement dit, seuls les **modules** des translations possibles sont à prendre en compte.

Le grand cercle est coupé par le petit cercle si ce dernier subit une translation de module au moins  $R$  et au plus  $3R$ . C'est-à-dire que, quelle que soit la valeur de  $\varphi$ , on aboutit à une zone des couples  $(a, b)$  possibles qui est une couronne (différence de deux disques) d'aire :

$$\pi(3R)^2 - \pi R^2 = 8\pi R^2$$

La zone  $Z$  est donc un "tuyau cylindrique" de diamètres intérieur  $R$  et extérieur  $3R$ , et de hauteur  $2\pi$ .

L'intégrale de volume (2) s'obtient par intégration, pour  $\varphi$  variant de 0 à  $2\pi$ , de la surface (constante)  $8\pi R^2$  de la section, en tenant compte du facteur  $n = 2$ , qui est le nombre de points en lesquels deux cercles se coupent en général (les cas de tangence, donnant la valeur  $n = 1$ , correspondent aux points situés à la surface de la zone  $Z$  : ils ne contribuent donc pas à la valeur du volume).

La valeur de l'intégrale est donc  $2\pi \times 8\pi R^2 \times 2 = 32\pi^2 R^2$

soit 4 fois le produit des longueurs  $L_0 L_1$ .

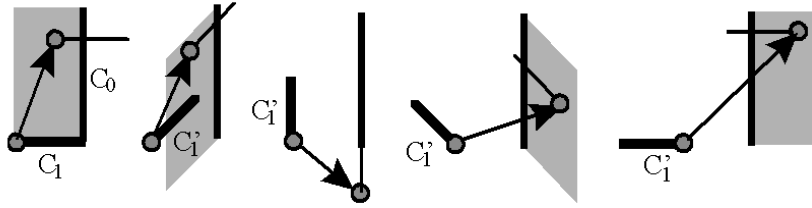


FIG. 3 – L'ensemble des  $(a, b)$  tels que  $D_{a,b,\phi}(C_1)$  (noté  $C_1'$  coupe  $(C_0)$ ) est matérialisé sous forme grisée, pour différentes valeurs de  $\phi$  ( $\phi = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi$ )

Le fait que  $\int_Z n \, da db d\phi = 4L_0L_1$  est général. Voyons-le sur un deuxième exemple.

**Exemple 2 :**

Considérons le cas où  $C_0$  et  $C_1$  sont des segments de longueurs  $L_0$  et  $L_1$  respec. (voir figure 3). Nous les avons positionnés de telle manière qu'ils se touchent et forment un angle égal à  $\frac{\pi}{2}$ . La figure 4 rend compte de la zone volumique  $Z \equiv Z_{C_0C_1}$  dont certaines sections horizontales sont les parallélogrammes de la Fig. 3a. Le premier schéma de la Fig. 3a correspond aux "translations pures", de vecteur  $(a, b)$ , c'est-à-dire à l'ensemble des couples  $(a, b)$  tels que  $C_0 \cap D_{a,b,0}(C_1) \neq \emptyset$ .

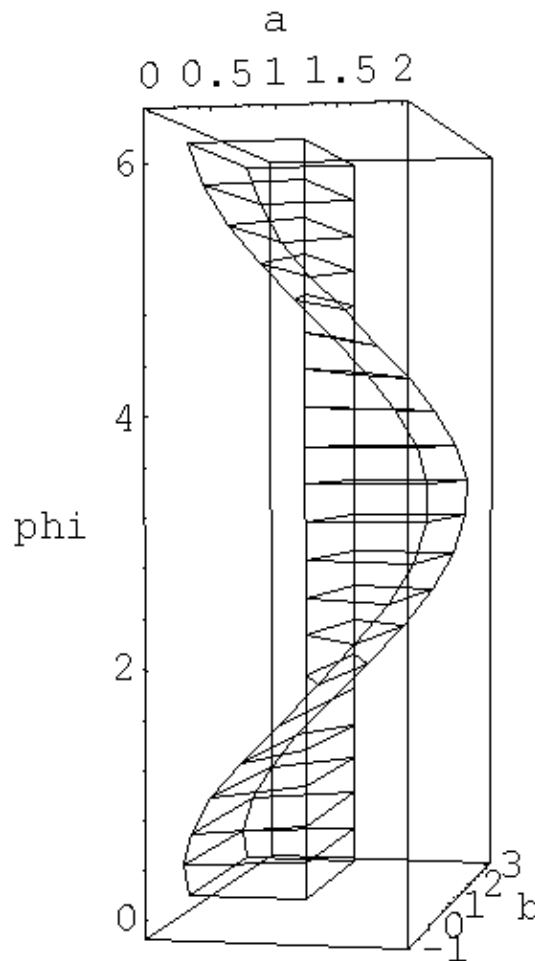


FIG. 4 – La zone "Z" (voir figure 3)

Cet ensemble est un rectangle d'aire  $L_0 \times L_1$  que l'on trouve à la base de la zone  $Z$ . Dans le cas général où il y a une rotation préalable  $\varphi$ , l'ensemble des couples  $(a, b)$  tels que  $C_0 \cap D_{a,b,\varphi}(C_1) \neq \emptyset$  est un parallélogramme d'angle d'ouverture  $(\frac{\pi}{2} + \varphi)$ , donc d'aire :

$$L_0 \times L_1 \times \left| \sin\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) \right| \quad (4)$$

L'intégrale de volume (2) est obtenue en intégrant, pour  $\varphi$  variant de 0 à  $2\pi$ , l'aire de la section à l'"altitude"  $\varphi$  (formule (4)), ce qui donne, cette fois encore,  $4L_0L_1$ . Il est donc temps d'énoncer :

## 5 Le Théorème de Poincaré

$$\boxed{\int_Z n \, dadbd\varphi = 4L_0L_1} \text{ avec } Z = \{(a, b, \varphi) \text{ tels que } \underbrace{\text{Card}(D_{a,b,\varphi}(C_1) \cap C_0)}_{n \text{ ou } n_{a,b,\varphi}} > 0\}$$

(le terme "Card" désignant le nombre d'éléments).

Donnons une preuve sommaire de ce théorème : envisager toutes les intersections entre la courbe  $C_0$  et une "déplacée" de la courbe  $C_1$  revient à considérer que ces courbes sont constituées d'une infinité de segments infinitésimaux auxquels on peut appliquer le résultat de l'exemple 2 ci-dessus : en sommant tous les résultats, on reconstitue les deux membres de l'égalité du théorème.

## 6 Une égalité isopérimétrique

Nous allons maintenant nous restreindre à un convexe compact  $K$  pour une plus grande simplicité d'exposition.

Sa frontière, notée également  $K$  par abus d'écriture, est une courbe fermée qui sera la courbe "analysée"  $C_0$  ; nous noterons  $L_0 = L$  sa longueur. Nous prendrons pour courbe "analysante"  $C_1$  un cercle de rayon  $r$  que nous noterons  $C$ .

Soit  $r_i$  (resp.  $r_c$ ) la borne supérieure des rayons des cercles intérieurs à  $K$  (resp. la borne inférieure des rayons des cercles contenant  $K$ ) (voir Fig. 4).

Il n'est pas difficile de montrer que ces bornes sont atteintes : on pourra donc parler d'un cercle inscrit et d'un cercle circonscrit à  $K$ .

Notons  $S_{n,r}$  (ou plus simplement  $S_n$ ) l'aire de l'ensemble des centres des cercles "copies du cercle  $C$ " qui coupent  $K$  en  $n$  points. Toujours par abus de notation,  $S_n$  désignera éventuellement l'ensemble correspondant.

**Remarque** : On admet que les  $S_n$  d'indices impairs sont d'aire nulle (ils correspondent essentiellement à des cas de tangence).

Comme il avait déjà été remarqué dans l'exemple 1 ci-dessus, lorsque la courbe "analysante" est un cercle, qui est invariant par rotation, il suffit de déterminer la zone surfacique "de base"  $Z_B$ , car alors la zone volumique  $Z$  est un cylindre de base  $Z_B$  et de hauteur  $2\pi$ .

Par suite, la formule de Poincaré appliquée au cas où la courbe analysante est un disque de rayon  $r$  donne

$$\int_Z n \, d\varphi \, dadb = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{Z_B} n \, dadb = 2\pi \int_{Z_B} n \, dadb = 4(2\pi r)L$$

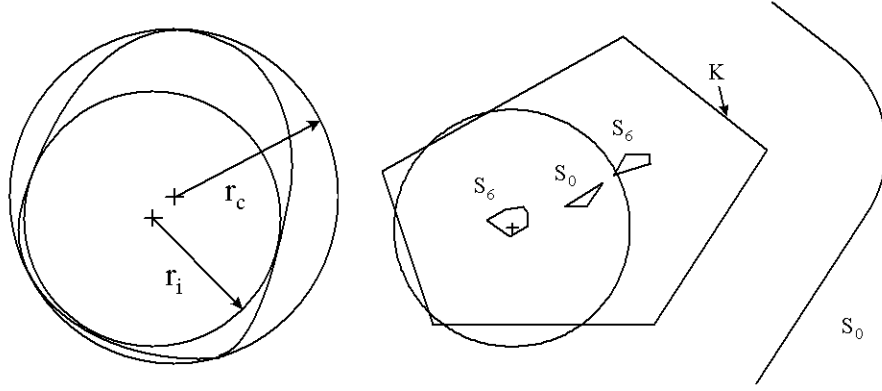


FIG. 5 – A - Un convexe borné avec un cercle inscrit de rayon minimal  $r_i$  et un cercle circonscrit de rayon minimal  $r_c$ . B - Quelques  $S_n$  pour un polygone convexe  $K$  à  $r$  fixé. Le cercle  $D_{a,b,\phi}(C)$  représenté ici coupe 6 fois  $K$ . Son centre appartient donc à la zone  $S_6$ . On remarquera que  $S_6$  et  $S_0$  ont 2 composantes. Les zones  $S_2$  et  $S_4$  n'ont pas été représentée sur ce schéma. Pour d'autres valeurs de  $r$ ,  $S_6$  par exemple, pourrait être vide.

soit

$$\int_{Z_B} n \, da db = 4rL$$

Or, par ailleurs, par définition des  $S_n$  :

$$\int_{Z_B} n \, da db = 2S_2 + 4S_4 + 6S_6 + \dots$$

D'où l'égalité :

$$2rL = S_2 + 2S_4 + 3S_6 + \dots \quad (5)$$

De même l'aire  $S_B = \int_{Z_B} da db$  de  $Z_B$  peut s'exprimer de deux façons :

D'une part, par définition des  $S_n$ , elle vaut :

$$S_B = S_2 + S_4 + S_6 + \dots$$

D'autre part, l'ensemble  $Z_B$  introduit ci-dessus *semble être* le dilaté de taille  $r$  du convexe  $K$ , ce qui permettrait d'utiliser la formule (14). Mais ceci dépend en fait de  $r$ . Précisément,  $Z_B$  sera le dilaté de taille  $r$  de  $K$  si :

$$r_i \leq r \leq r_c \quad (6)$$

En effet :

- d'une part, il faut que  $r \geq r_i$ . Si tel n'était pas le cas, soit  $\Omega$  le centre d'un cercle inscrit maximal; et soit  $\Delta$  le disque de centre  $\Omega$  et de rayon  $(r_i - r)/2$ . Clairement, l'ensemble  $S_0$  (tel qu'il a été défini au début de ce paragraphe) contient  $\Delta$  : la formule (14) n'est donc plus exacte (il faudrait la remplacer par  $S_B = S - S_0 + rL + \pi r^2$ ).

- d'autre part, on doit avoir  $r \leq r_c$  afin de garantir que tout cercle centré sur le contour de  $K$  coupe en au moins un point ce contour (sous peine de contradiction avec la minimalité de  $r_c$ ).

Soit donc un certain  $r$  vérifiant la condition (6). Nous pourrions alors écrire :

$$S + rL + \pi r^2 = S_2 + S_4 + S_6 + \dots \quad (7)$$

Par suite, si l'on soustrait membre à membre (7) de (5) :

$$rL - S - \pi r^2 = S_4 + 2S_6 + 3S_8 + \dots \quad (8)$$

(8) peut être mise sous la forme suivante, appelée **égalité** isopérimétrique :

$$\forall r \in [r_i, r_c] : \quad \frac{L^2}{4\pi} - S = \pi \left( \frac{L}{2\pi} - r \right)^2 + S_4 + 2S_6 + 3S_8 + \dots \quad (9)$$

(rappelons que les  $S_k$  dépendent de  $r$ ).

Le second membre de (9) étant positif, on en tire

$$\frac{L^2}{4\pi} - S \geq 0$$

c'est-à-dire que l'on a ainsi prouvé une deuxième fois l'inégalité isopérimétrique ; à ceci près que le cas d'égalité (réalisé si et seulement si l'on a un cercle) nécessite, pour pouvoir être traité, un petit raisonnement supplémentaire qui va nous donner, chemin faisant, une inégalité remarquable.

D'abord, l'on déduit de (9) l'inégalité :

$$\forall r \in [r_i, r_c] \quad \sqrt{\frac{L^2}{4\pi} - S} \geq \sqrt{\pi} \left| \frac{L}{2\pi} - r \right| \quad (10)$$

Or, pour les deux valeurs particulières  $r_i$  et  $r_c$ , on a :

$$\frac{L}{2\pi} - r_i \geq 0 \quad \text{et} \quad \frac{L}{2\pi} - r_c \leq 0 \quad (11)$$

D'où, d'après (10) :

$$\sqrt{\frac{L^2}{4\pi} - S} \geq \sqrt{\pi} \left( \frac{L}{2\pi} - r_i \right) \quad \text{et} \quad \sqrt{\frac{L^2}{4\pi} - S} \geq \sqrt{\pi} \left( -\frac{L}{2\pi} + r_c \right)$$

Ce qui donne, par addition :  $2\sqrt{\frac{L^2}{4\pi} - S} \geq \sqrt{\pi}(r_c - r_i)$  soit

$$\boxed{\frac{L^2}{4\pi} - S \geq \frac{\pi}{4} (r_c - r_i)^2} \quad (12)$$

qui est l'inégalité dite de **Bonnesen**, que l'on peut considérer comme un raffinement de l'inégalité isopérimétrique.

Elle nous permet en particulier de conclure que l'égalité  $\frac{L^2}{4\pi} - S = 0$  ne peut avoir lieu que pour un cercle, qui est le cas unique où  $r_c = r_i$ .

**Remarques :**

1) Les inégalités (11), écrites sous la forme  $2\pi r_i \leq L \leq 2\pi r_c$ , s'établissent facilement grâce à la formule de calcul de la longueur d'une courbe paramétrée en coordonnées polaires (voir Annexe).

2) (12) permet de définir une autre mesure de circularité avec le coefficient  $B = \left[ \frac{\pi}{4} (r_c - r_i)^2 \right] / \left[ \frac{L^2}{4\pi} - S \right]$  qui est toujours compris entre 0 et 1 (un convexe est d'autant plus circulaire que  $B$  est plus proche de 1). Le triangle équilatéral semble avoir le plus mauvais rapport :  $B \simeq 0.231\dots$



## 7 Annexe : rappels divers

Le **déplacement** (plan)  $D_{a,b,\varphi}$  est, par définition, la rotation d'angle  $\varphi$  ( $0 \leq \varphi < 2\pi$ ) suivie de la translation de vecteur  $(a, b) \in \mathbf{R}^2$  (attention : cet ordre doit être respecté car rotations et translations ne commutent pas en général!). La composition de deux déplacements est un déplacement :

$$D_{a'',b'',\varphi''} = D_{a',b',\varphi'} \circ D_{a,b,\varphi} \text{ avec } \begin{cases} a'' = a' + a \cos \varphi' - b \sin \varphi' \\ b'' = b' + a \sin \varphi' + b \cos \varphi' \\ \varphi'' = \varphi' + \varphi \end{cases} \quad (13)$$

Une **similitude** est la composée d'un déplacement et d'une homothétie.

Une **courbe paramétrée** est l'image d'une application continue  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^2$  (où  $[a, b]$  est un intervalle compact de  $\mathbf{R}$ ). En termes cinématiques, on parle d'une **trajectoire** commençant au temps  $a$  et finissant au temps  $b$ . Une trajectoire est elle-même compacte en tant qu'image d'un compact. La fonction  $\varphi$  est appelée fonction de paramétrage. Si  $\psi : [c, d] \rightarrow [a, b]$  avec  $\psi$  dérivable et à dérivée  $> 0$ , la fonction  $\varphi \circ \psi : [c, d] \rightarrow \mathbf{R}^2$  générera la même trajectoire mais avec un paramétrage différent ; on peut toujours faire en sorte que le paramétrage soit fait par l'abscisse curviligne (voir plus loin).

Si  $\varphi$  est un paramétrage tel que  $\varphi(a) = \varphi(b)$ , on dit que la courbe est **fermée**.

Si  $(a, b)$  est la seule paire de valeurs  $(u, v)$  pour laquelle on a  $\varphi(u) = \varphi(v)$ , on dit que la courbe est fermée **simple** (ce qui traduit le fait qu'elle ne se coupe pas elle-même).

On rappelle le **théorème de Jordan** :

Une courbe fermée simple est un compact du plan dont le complémentaire a deux composantes connexes ; l'une d'elles est bornée : on l'appelle l'**intérieur** de la courbe.

Une courbe sera dite **orientée** dans le sens positif si elle laisse l'intérieur "à gauche de la tangente orientée dans le sens du paramétrage".

Chaque fois que cela sera nécessaire, on supposera que les courbes considérées sont "suffisamment dérivables", notamment pour pouvoir parler de longueurs et d'aires.

a) La longueur d'une courbe, selon que l'on est en coordonnées cartésiennes ou polaires, est donnée par :

$$\begin{cases} \int ds = \int (dx^2 + dy^2)^{1/2} = \int_a^b \left( \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 \right)^{1/2} dt \\ \int ds = \int (dr^2 + r^2 d\theta^2)^{1/2} = \int_0^{2\pi} \left( \left( \frac{dr}{d\theta} \right)^2 + r^2 \right)^{1/2} d\theta \end{cases}$$

Lorsque le paramétrage est fait par l'abscisse curviligne ( $x = x(s), y = y(s)$ ), alors :  $\left( \frac{dx}{ds} \right)^2 + \left( \frac{dy}{ds} \right)^2 = 1$ . Autrement dit, le vecteur  $(x'(s), y'(s))$ , tangent en  $s$ , est unitaire.

b) L'aire intérieure à une courbe paramétrée  $(x(t), y(t))$  ( $a \leq t \leq b$ ) est donnée (si la courbe est orientée dans le sens +) par la formule :

$$A = \int_a^b x(t)y'(t)dt = - \int_a^b x'(t)y(t)dt = \frac{1}{2} \int_a^b (x(t)y'(t) - x'(t)y(t))dt$$

**Le dilaté d'un ensemble :**

Soit  $E$  l'intérieur d'une courbe simple fermée de longueur  $L$  et dont l'aire est  $S \equiv S_{(0)}$ .

On appelle **dilaté de taille**  $r$  de  $E$  l'ensemble des points du plan situés à une distance (euclidienne) inférieure à  $r$  de l'ensemble  $E$ .

On montre que, si  $E$  est convexe, l'aire de ce dilaté de taille  $r$  est donnée par la formule :

$$S(r) = S_{(0)} + rL + \pi r^2 \quad (14)$$

La Fig. 6 illustre (14) dans le cas où le convexe est un polygone.

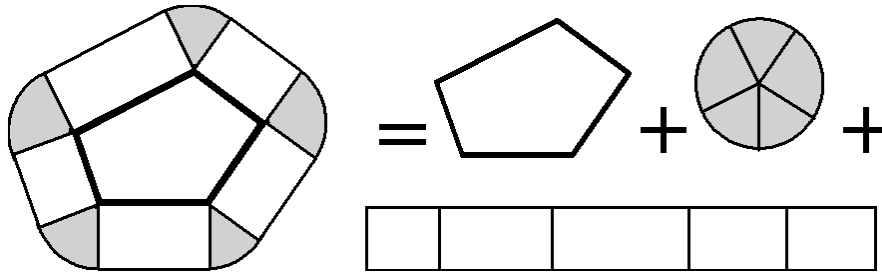


FIG. 6 - L'aire  $S(r)$  du dilaté