N° d'ordre:

THÈSE

présentée

devant l'Université de Saint-Etienne

pour obtenir le grade de :

Docteur de l'Université de Saint-Etienne
Spécialité Informatique, Analyse et Traitement d'Images

par

Stéphane Grousson
Ingénieur CPE Lyon

Modèles géométriques pour de nouvelles interprétations en imagerie

À soutenir le 17 Décembre 2002 devant la commission d'examen

MM. :	Attila	Baskurt	Rapporteurs
	Jean-Pierre	Reveilles	
MM. :	Jean-Marie	Becker	Examinateurs
	Michel	Jourlin	
	Dominique	Jeulin	
	Laurent	Nottale	

à mes parents

Remerciements

Je tiens à remercier en premier lieu, le professeur Michel Jourlin, du Laboratoire de Traitement du Signal et d'Instrumentation de Saint-Etienne, pour m'avoir fait confiance et m'avoir accueilli au sein de son laboratoire. Je retiendrai particulièrement l'enrichissement personnel et scientifique dont il m'a fait profiter.

Cet encadrement a été largement accompagné par Jean-Marie Becker, professeur à CPE Lyon, que je tiens également à remercier ici. Il a suivi avec attention toute l'évolution de mon travail et m'a fourni de nombreuses pistes de recherche. Ses commentaires et conseils m'ont été très précieux. Je n'oublierai pas la gentillesse et le dévouement dont il a fait preuve pendant mes années de thèse, ainsi que sa passion pour les mathématiques qu'il sait si bien transmettre à ses étudiants.

Mes remerciements vont aussi aux professeurs Atilla Baskurt et Jean-Pierre Reveilles, qui malgré un emploi du temps chargé, ont accepté d'être mes rapporteurs.

Messieurs Laurent Nottale et Dominique Jeulin m'ont fait l'honneur de participer au jury ; je les en remercie profondément.

Je tiens aussi à mentionner le grand plaisir que j'ai eu à travailler au sein du LTSI lors de ma dernière année de thèse. J'en remercie tous les membres, en particulier Cécile pour ses relectures et ses encouragements.

Je pense aussi aux doctorants ou récents docteurs du LISA avec qui j'ai partagé trois années très enrichissantes. Je tiens donc à remercier Romuald pour son soutien (tant moral que logistique :-), Laurent pour m'avoir choisi comme modèle à atteindre, Frédéric pour avoir tenu les comptes de la caisse café, David pour ses blagues, Pierre pour son aide en informatique, Mathieu et Matthieu pour leur soutien...

Enfin, je remercie toutes les personnes dont j'ai croisé le chemin au laboratoire et qui ont apporté leur pierre à l'édifice : Natacha, Isabelle, Jerome, Oscar, Catherine...

A tous merci...

Résumé

La Transformée de Hough est un outil standard dans le domaine du traitement de l'image. Elle permet la détection d'alignements multiples en les associant, dans un espace de paramètres, à des maxima locaux obtenus par des intersections de sinusoïdes. La *T.H.* peut être aussi généralisée à la détection de formes géométriques plus complexes.

Cette thèse expose et étudie d'autres transformations présentant la même propriété d'échange entre alignement et intersection, mais fondées sur des courbes différentes : cercles ou droites. Ces transformée ont de nombreux liens avec d'autres domaines de la géométrie.

Dans un premier temps, l'espace des cercles Ω_2 (qui regroupe sous une même paramétrisation les cercles, les droites et les points du plan) fournit un cadre unificateur. En effet sa structure euclidienne et les propriétés de ses différents sous-espaces permettent d'interpréter différents algorithmes géométriques : construction des diagrammes de Voronoï, des diagrammes des plus proches voisins, détermination du cercle circonscrit à un nuage de points de rayon minimum, etc....

Ensuite, ce travail se concentre plus particulièrement sur l'une des transformées à savoir la Transformée Polaire (T.P.) qui peut être reliée aux premières par inversion. La T.P. est fondée sur la dualité point-droite et présente des propriétés essentielles comme la transformation de coniques ponctuelles en coniques tangentielles. Par ailleurs, la transformée polaire peut être employée pour quantifier et cartographier des erreurs quadratiques d'alignement.

Toutes ces transformations peuvent être étendues à des formes. De plus, cette thèse met en évidence une mesure invariante par translation établissant un lien fort avec la géométrie intégrale.

Enfin, Le domaine de la géométrie différentielle définit un cadre particulièrement intéressant pour l'étude générale de la Transformée Polaire.

Introduction

La transformée de Hough tire son nom du scientifique américain Paul Hough qui l'a brevetée en 1962 [16][30][36]. C'est un outil standard dans le domaine de la vision au point que des composants électroniques ont été spécialement conçus pour accélérer cette transformée. Dédiée à l'origine à la détection d'alignement de points, elle a été étendue à la détection et l'extraction d'objets géométriques plus complexes tels que les cercles ou les ellipses. Cette transformation est basée sur un espace de paramètres réorganisant l'information présente dans l'image et associant certains maxima locaux à la "probabilité de présence" d'une certaine forme ou propriété recherchée.

Cependant, l'incertitude liée à cette détection n'est pas aisée à quantifier, comme le montrent un certain nombre de travaux, souvent récents[37] [50] [51] [42].

L'une des motivations initiales de ce travail est donc l'étude de cette incertitude, au travers d'une autre propriété beaucoup moins connue de la transformée de Hough, à savoir l'égalité existant entre le périmètre d'une forme et l'aire de sa transformée. Il s'agit de résultats de "type Crofton" [13], en référence au créateur des probabilités géométriques [7][45][42][25][48]. Nous avons progressivement élargi ce travail à l'étude de différentes transformées géométriques associant, à des alignements de points, des intersections de courbes.

Parmi celles-ci, la transformée par polaires réciproques (que nous appelerons plus simplement Transformée Polaire)[11], nous est apparue progressivement comme incontournable car connectée à très de nombreux domaines notamment au moyen d'invariants, de mesures, de distances (géométries intégrale, projective, différentielle-affine, mais aussi dualité, formes quadratiques ...).
Pour des raisons d'utilisation pratique mais aussi d'ordre didactique, nous ferons avant tout une étude plane. Cependant, la grande majorité des résultats obtenus s'étend presque sans changements à l'espace $\mathbb{R}^3$ et plus généralement à $\mathbb{R}^n$.

Dans le premier chapitre, nous décrivons l'espace des cercles Ω_2 qui permet de regrouper sous une même paramétrisation les cercles, les droites et les points du plan. Il joue un rôle central dans les problèmes de dualité point-cercle et point-droite. Cette dualité est associée à une forme quadratique et permet de définir un pseudo-produit scalaire particulièrement intéressant. Par ailleurs, les différents sous-espaces de Ω_2 permettent d'interpréter de nombreuses propriétés géométriques des cercles.

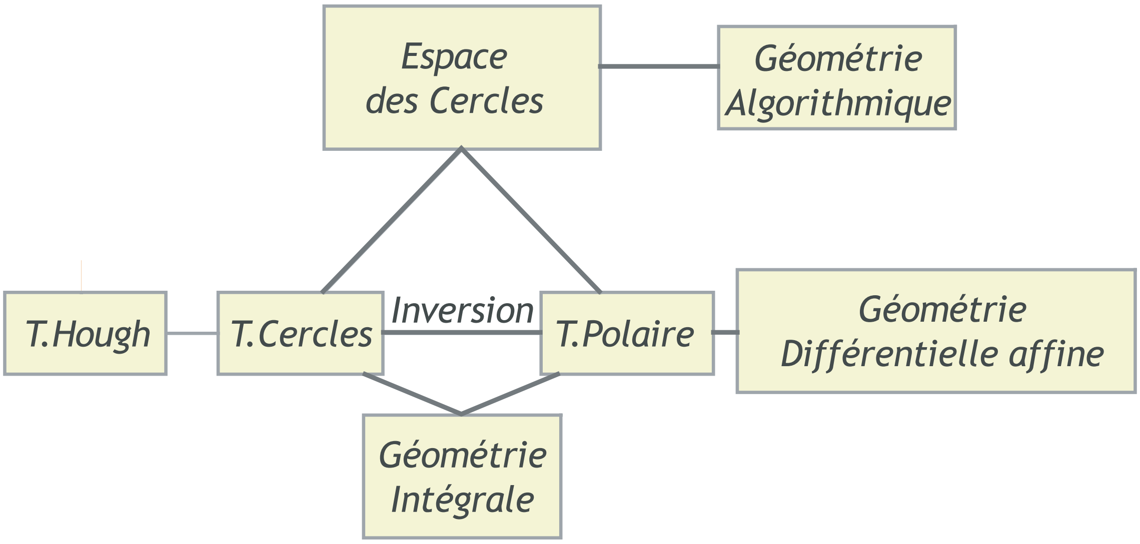
L'intérêt de l'espace des cercles n'a, jusqu'à présent, guère été reconnu que par des mathématiciens "classiques" [10][6] [44] et par la communauté "géométrie algorithmique" [39]. Il nous a donc paru indispensable de présenter d'abord, avec un certain détail, l'espace des cercles et ses propriétés essentielles. Nous montrons ensuite comment il est possible dans ce cadre d'interpréter différents algorithmes, notamment ceux de construction des diagrammes de Voronoï (de trois types : classique, de puissance et des "plus proches voisins") [21][8] ainsi qu'un algorithme de détermination du cercle circonscrit à un nuage de points de rayon minimum [35][38].

Dans le chapitre suivant, nous rappelons la définition et les propriétés essentielles de la Transformée de Hough et des Transformées en Cercles. Ces dernières sont issues des travaux de la Thèse d'habilitation de Jean-Marie Becker [3][4] et trouvent naturellement un intérêt à être interprétées dans l'espace des cercles. Les deux transformations ont la propriété d'échanger un alignement de points en une intersection de courbes.

La Transformée Polaire est une transformation fondée sur la dualité point-droite et fait l'objet pdu quatrième chapitre. L'inversion, transformation géométrique classique dont nous rappelons la définition en Annexe A, établit un lien direct entre cette transformée et les précédentes [3]. La Transformée Polaire présente des propriétés supplémentaires, comme la transformation de coniques ponctuelles en coniques tangentielles et permet de revoir sous un angle original l'erreur d'alignement au sens des moindres carrés.

Ces transformations peuvent être étendues à des formes. Elles ont alors ce que l'on pourrait appeler la "propriété de Crofton" (propriété *P.A.* ci-après) où le périmètre de la forme est lié à l'aire de la transformée à condition cette fois de pondérer la mesure de Lebesgue par une fonction qui dépend de la transformation. Il s'agit en fait d'une mesure invariante par déplacement, classique en géométrie intégrale [45] [48] [45].

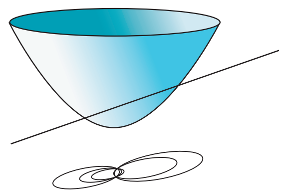
Enfin, nous terminerons par un chapitre dédié à la géométrie différentielle affine [9][18]. Appartenant au domaine de la géométrie différentielle, cette théorie est l'objet de nombreuses recherches actuelles. Elle définit notamment une abscisse curviligne centro-affine et une courbure centro-affine. C'est un cadre particulièrement intéressant pour l'étude générale de la Transformée Polaire et pour démontrer certains résultats par une autre approche.


Espace
des Cercles
Géométrie
Algorithmique
T.Hough
T.Cercles
Inversion
T.Polaire
Géométrie
Différentielle affine
Géométrie
Intégrale

Chapitre 1

L'espace des cercles

L'espace des cercles du plan, que nous noterons Ω_2, est un espace de paramètres où chaque cercle est représenté en tant que point. Son extension en un espace projectif Ω_2^p permet de regrouper dans une même formulation points, cercles et droites du plan. Ω_2^p présente une structure pseudo-euclidienne dérivée d'une forme quadratique. Plusieurs sous-ensembles de Ω_2 sont étudiés et interprétés géométriquement. Les résultats restent valables pour des sphères de l'espace et plus généralement, pour des hypersphères dans $\mathbb{R}^n$ [6].



1.1 Introduction

De nombreuses applications en traitement d'image, en géométrie algorithmique ou en recherche de configurations optimales (triangulation de Delaunay, squelettisation, etc ...) reposent sur les cercles et leurs propriétés.

Un cercle du plan euclidien étant défini par trois paramètres, par exemple son rayon et les coordonnées de son centre, il peut être associé à un point d'un espace à trois dimensions.

L'espace des cercles Ω_2 est un espace de représentation basé sur l'une de ces paramétrisations. Son introduction remonte au 19ème siècle puisqu'on le trouve décrit plus ou moins explicitement dans les travaux de Clifford, de Darboux et de Frobenius. Mais c'est avant tout avec les travaux de Coolidge [12] et d'Elie Cartan [10] qu'il prend sa forme "actuelle". Ce chapitre est une synthèse des différentes propriétés de cet espace (géométriques, algébriques, topologiques...) qui permettent de disposer d'un outil pour illustrer et développer de nouveaux algorithmes. On consultera avec profit la référence [39], que nous avons découvert tardivement dans notre étude.
Dans une première partie, nous présenterons une paramétrisation définissant l'espace Ω_2, ainsi que son extension à un espace projectif à quatre dimensions Ω_2^p regroupant cercles, droites et points du plan. Nous verrons qu'il est possible de structurer cet espace par une forme quadratique q. Bien que cette dernière ne soit pas définie positive, la forme bilinéaire associée peut être considérée comme un pseudo produit scalaire aux propriétés riches. Elle permet notamment de rendre compte de la position relative de deux cercles (intersection, tangence, orthogonalité...) et de mettre à profit les notions de dualité par rapport à une certaine quadrique.

Dans une deuxième partie, nous verrons les principaux sous-espaces de Ω_2 et leurs interprétations géométriques que nous retrouverons dans les chapitres suivants. L'étude est limitée aux cercles pour faciliter la compréhension, mais la quasi-totalité des définitions et propriétés peuvent être directement étendues à l'espace des hyper-sphères de $\mathbb{R}^n$.

1.2 Définition et premières propriétés

1.2.1 Définition

Un cercle peut être caractérisé par son centre (a, b) et son rayon r, l'appartenance d'un point de coordonnées (x, y) à ce cercle étant définie par :

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \tag{1.1}$$

Cependant, ces trois degrés de liberté (a, b, r) peuvent être représentés par d'autres paramètres. A cet effet, le développement de 1.1 donne :

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0 \tag{1.2}$$

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0 \tag{1.3}$$

avec

$$c = a^2 + b^2 - r^2 \tag{1.4}$$

La relation fondamentale 1.4 montre que le triplet (a, b, c) définit un cercle de manière unique, sous réserve, puisque $r^2 \geq 0$ que :

$$a^2 + b^2 \geq c \tag{1.5}$$

condition sur laquelle nous reviendrons ultérieurement.

Le paramètre c est ce que l'on appelle la *puissance de l'origine* par rapport au cercle. Lorsque le cercle ne contient pas l'origine O, c'est le carré de la distance entre O et le point de contact de la tangente au cercle menée par O (Fig. 1.1a).

Définition 1 *On appelle espace des cercles, noté Ω_2, l'ensemble des paramètres (a, b, c) décrivant les cercles de centre (a, b) et de rayon r, avec*

$$r^2 = a^2 + b^2 - c \tag{1.6}$$

□

Remarque : Toutes les définitions ou propriétés données dans ce chapitre pour l'espace Ω_2 sont transposables à l'espace Ω_n des hypersphères de $\mathbb{R}^n$ avec, pour une sphère d'équation $\sum (x_i - a_i)^2 = r^2$, une définition du paramètre c en tout point semblable :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_i^2 - r^2}_{c} = 0$$

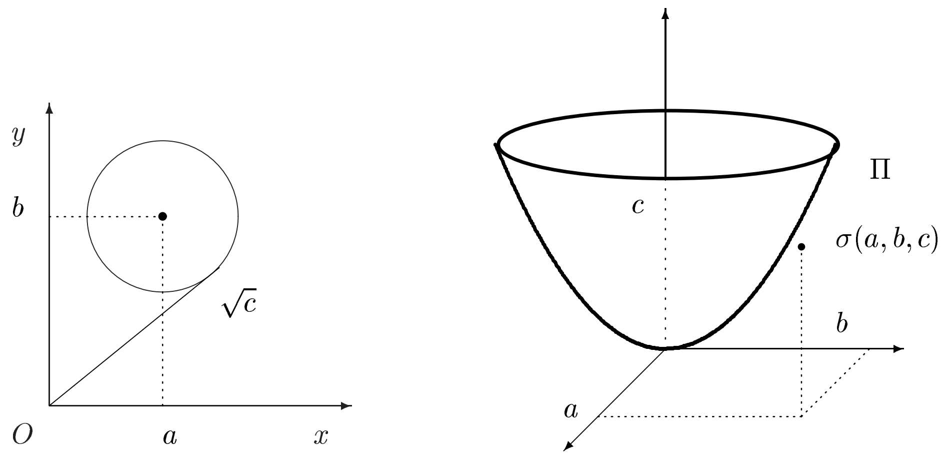
1.2.2 Paraboloïde Π

Il y a un sens à parler du cercle de paramètres (a, b, c) si et seulement si $r = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$ appartient à $\mathbb{R}^+$, soit si $a^2 + b^2 - c \geq 0$.
L'équation $c = a^2 + b^2$ définit un paraboloïde, noté Π.

Ainsi, les triplets tels que $a^2 + b^2 - c < 0$ sont à l'intérieur de Π, et ne sont associés à aucun cercle (Fig. 1.1b). Ceux qui appartiennent à Π représentent des cercles-points, i.e. des cercles de rayon nul. Nous verrons par la suite que ce paraboloïde joue un rôle central dans l'espace Ω_2. L'intérieur du paraboloïde est donc, en quelque sorte, "interdit".

Il est important de remarquer que le plan euclidien de référence possède deux "copies" dans Ω_2 :

- l'une qui est le plan horizontal $c = 0$.
- l'autre qui est le "relèvement" de ce plan sur le paraboloïde, ce qui revient bien naturellement à assimiler points et cercles-points.



(a) (b)

FIG. 1.1 – Cercle de paramètre (a, b, c) (a) dans le plan (b) dans l'espace Ω_2 et paraboloïde isotrope.

1.2.3 Définition de la somme de 2 cercles

La loi de composition interne $+$ classique de $\mathbb{R}^3$ n'est pas adaptée à l'espace Ω_2. En effet, le résultat de la somme *terme à terme* des coordonnées (a_1, b_1, c_1) et (a_2, b_2, c_2) peut très bien violer la condition de positivité du carré du rayon $a^2 + b^2 - c \geq 0$.
Si, par exemple, $\sigma_1 = (a, b, c)$ et $\sigma_2 = (-a, -b, c)$ avec $c > 0$ alors $\sigma_1 + \sigma_2 = (0, 0, 2c)$ ne représente pas un cercle, car intérieur au paraboloïde Π.

Il faut donc définir une nouvelle opération interne $\oplus$ adaptée à Ω_2.

Définition 2 *Etant donnés les cercles $\sigma_1(a_1, b_1, c_1)$ et $\sigma_2(a_2, b_2, c_2)$, on définit le cercle $\sigma = \sigma_1 \oplus \sigma_2$ par ses coordonnées : $(a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2 + 2a_1a_2 + 2b_1b_2)$.* □

Propriété 1 $(\Omega_2, \oplus)$ *est un groupe abélien.* □

Preuve
- Il faut avant tout vérifier que $\oplus$ est une opération interne. En effet, étant donnés deux cercles $\sigma_1(a_1, b_1, c_1)$ et $\sigma_2(a_2, b_2, c_2)$, $a_1^2 + b_1^2 - c_1 \geq 0$ et $a_2^2 + b_2^2 - c_2 \geq 0$, on a :

$$
\begin{aligned}
a^2+b^2-c &= (a_1+a_2)^2+(b_1+b_2)^2-c_1-c_2-2a_1a_2-2b_1b_2 \\
a^2+b^2-c &= \underbrace{a_1^2+b_1^2-c_1}_{r_1^2\geq 0}+\underbrace{a_2^2+b_2^2-c_2}_{r_2^2\geq 0}\geq 0
\end{aligned}
$$

Ainsi, le cercle $\sigma=\sigma_1\oplus\sigma_2$ appartient également à Ω_2. De plus,
- le cercle $\sigma(0,0,0)$ est élément neutre.
- $\oplus$ est associatif et commutatif.

$\square$

Remarques :
- *On notera la relation simple entre les rayons (r_1, r_2) des cercles et le rayon r du cercle somme : $r^2=r_1^2+r_2^2$.*

- *L'addition d'un cercle point $\sigma(a,b,a^2+b^2)$ réalise la translation de vecteur $\overrightarrow{u}=(a,b)$.*

1.3 L'espace projectif Ω_2^p

1.3.1 Définition

L'équation générique d'un cercle sous la forme 1.3 gagne à être écrite sous forme projective grâce à l'introduction d'un paramètre d'homogénéité t :

$$t(x^2+y^2)-2ax-2by+c=0 \tag{1.7}$$

Si $t=1$, les équations 1.7 et 1.3 sont strictement identiques.

L'intérêt de cette nouvelle équation apparaît lorsque la valeur de t est nulle : les termes carrés disparaissent alors, et on obtient l'équation d'une droite.

Les paramètres (a,b,c,t) et $(\lambda a,\lambda b,\lambda c,\lambda t)$ étant associés à une même équation :

$$t(x^2+y^2)-2ax-2by+c=0=\lambda t(x^2+y^2)-2\lambda ax-2\lambda by+c\lambda \tag{1.8}$$

on est donc bien en présence d'un espace Ω_2^p dit "projectif" à quatre dimensions : les points ayant des coordonnées égales à un facteur près sont équivalents.

Les ensembles de point, de cercle et de droite du plan sont associés respectivement à un point de Ω_2^p selon les règles suivantes :

- le point de coordonnées (a,b) est associé au point $(a,b,a^2+b^2,1)$.
- le cercle de paramètres (a,b,c) est associé au point $(a,b,c,1)$.
- la droite d'équation $ax+by=1$ est associée au point $(a,b,2,0)$.

Remarque : L'équation 1.7 peut s'écrire aussi sous la forme :

$$x^2 + y^2 - 2\frac{a}{t}x - 2\frac{b}{t}y + \frac{c}{t} = 0 \tag{1.9}$$

Lorsque t tend vers 0, on dit que le cercle est "envoyé" à l'infini ; la droite apparaît ainsi comme la limite d'un cercle (Fig 1.6).

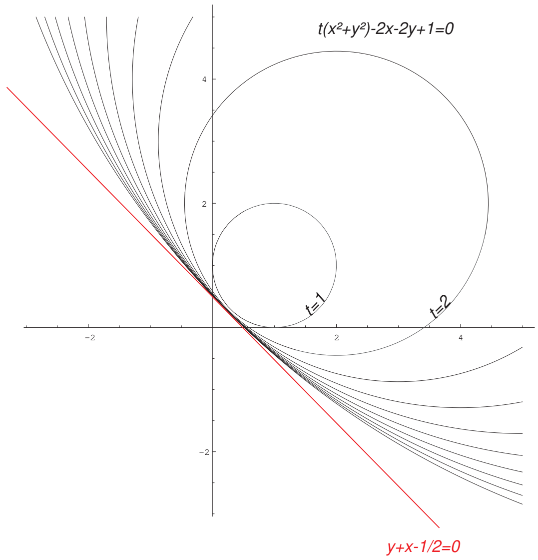


FIG. 1.2 – Evolution du cercle $t(x^2 + y^2) - 2x - 2y + 1 = 0$ en fonction de t.

Remarque : Si on distingue entre $t > 0$ et $t < 0$, on obtient la théorie des cercles orientés de Laguerre [6][27].

1.3.2 Forme quadratique

L'espace Ω_2^p vu précédemment est structuré par la forme quadratique suivante :

$$q : \Omega_2^p \to \mathbb{R}$$
$$(a, b, c, t) \mapsto a^2 + b^2 - ct$$

soit, sous forme matricielle :

$$q = \mathbf{X^T Q X} \quad avec \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{-1}{2} & 0 \end{pmatrix} \tag{1.10}$$

La forme bilinéaire symétrique associée est définie par :

$$b : \Omega_2^p \times \Omega_2^p \to \mathbb{R} \tag{1.11}$$
$$((a,b,c,t),(a',b',c',t')) \to aa' + bb' - \frac{1}{2}c't - \frac{1}{2}t'c \tag{1.12}$$

Ou encore, sous forme matricielle :

$$b(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = \mathbf{X^T Q Y} \tag{1.13}$$

La forme q étant de signature $(++--)$, Ω_2^p est un espace symplectique.

Comme Q n'est pas définie positive, b ne définit pas un produit scalaire au sens ordinaire. Cependant, nous allons voir que la forme bilinéaire b reste un outil intéressant pour l'étude des propriétés géométriques des cercles et des droites. C'est pourquoi nous qualifierons b de pseudo produit scalaire et nous noterons :

$$b(x,y) =< x,y > \tag{1.14}$$

De même, nous utiliserons le terme de pseudo-norme (et la noterons $\| \, . \, \|$) pour :

$$\|(a,b,c,t)\| = \sqrt{q((a,b,c,t)} = \sqrt{a^2+b^2-ct} \tag{1.15}$$

Remarque :
- *Occasionnellement, dans la suite, il arrivera que l'on laisse de côté le qualificatif "pseudo", avant tout pour alléger la description.*
- *pour les cercles, la pseudo-norme est tout simplement le rayon. C'est heureux car la notion de norme est (au moins dans les espaces classiques) censée représenter la "taille" de l'objet.*

1.3.3 Pseudo produit scalaire

Ce produit scalaire permet de caractériser la position relative d'un point p par rapport à un cercle σ ou à une droite δ :
- $< p,\sigma >= 0$ si p appartient au cercle σ.
- $< p,\sigma >$ est positif (resp. négatif) si p est intérieur (resp. extérieur) au cercle σ.
- $< p,\delta >= 0$ si p appartient à la droite δ.
- $< p,\delta >$ est positif (resp. négatif) si p est à droite (resp. à gauche) de δ orienté par le vecteur $(-b,a)$.

De même, il est possible de déterminer la position relative de deux cercles σ et σ' de coordonnées respectives $(a,b,c,1)$ et $(a',b',c',1)$ dans l'espace Ω_2^p. Pour cela, il suffit de calculer la valeur $\alpha = \frac{<\sigma,\sigma'>}{\|\sigma\|\|\sigma'\|}$, cette dernière pouvant être interprétée comme le cosinus de l'angle (dans certains cas complexe) que font les rayons des deux cercles en l'un de leurs points communs (Fig 1.3).

- si $|\alpha| > 1$, les deux cercles n'ont aucun point commun.

- si $\alpha = 1$, les cercles sont confondus.
- si $\alpha = 0$, les cercles sont orthogonaux.
- si $\alpha = -1$, les cercles sont tangents.
- si $\alpha < 1$, les cercles sont sécants en 2 points et l'angle entre les rayons aux points d'intersection est $Arccos(\alpha)$.

De même, pour les droites δ et δ' :
- si $< \delta, \delta' >= 0$, δ est orthogonale à δ'.
- si $< \delta, \delta' >= \|\delta\| \, \|\delta'\|$, δ est parallèle à δ'.

Donnons pour terminer une formule particulière : Si $d(p, p')$ désigne la distance entre deux points p et p', alors $< p, p' >= -2d^2$.

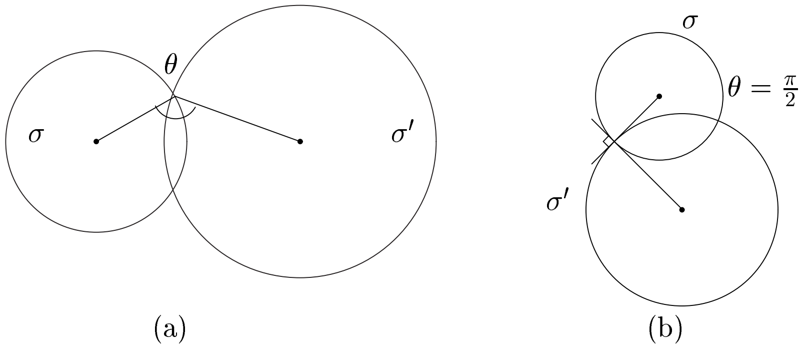


Fig. 1.3 – Pseudo-produit scalaire entre deux cercles (a) $\alpha < 1$ (b) $\alpha = 0$.

1.3.3.1 Espace dual

L'espace $L(\Omega_2^p, \mathbb{R})$ des applications linéaires de Ω_2^p dans $\mathbb{R}$ est appelé espace dual de Ω_2^p. Soit φ appartenant à $L(\Omega_2^p, \mathbb{R})$, et $v(x, y, z, w)$ un vecteur de Ω_2^p.
$\varphi(v)$ s'écrit alors sous la forme :

$$\varphi(v) = \begin{pmatrix} a & b & c & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = ax + by + cz + tw$$

Le terme *dualité* vient du rôle symétrique joué par (a, b, c, t) et (x, y, z, w). On peut appliquer φ au vecteur v, ou le vecteur v sur l'application φ.

La notion de forme linéaire est directement liée à celle d'hyperplan. Tout hyperplan H de Ω_2^p est le noyau d'une forme linéaire l_H unique à un facteur près. En effet, les formes multiples de l_H ont le même noyau : si $l_H(x) = 0$, $\lambda l_H(x) = 0$.

La forme quadratique q permet donc naturellement, par l'intermédiaire de la forme bilinéaire associée, de mettre en relation un point $P(a_o, b_o, c_o, t_o)$ de Ω_2^p (le pôle) avec son plan (polaire) d'équation :

$$aa_o + bb_o - \frac{1}{2}c_o t - \frac{1}{2}ct_o = 0 \tag{1.16}$$

Remarque : Les points appartenant à un cercle σ ou une droite δ appartiennent aussi au plan polaire associé respectivement à σ ou δ.

1.4 Sous-ensembles particuliers dans Ω_2

1.4.1 Les plans tangents à Π

Propriété 2 *Dans l'espace Ω_2, l'ensemble des cercles passant par le point $M_o(x_o, y_o)$ forme le plan tangent au paraboloïde Π en $\omega(x_o, y_o, x_o^2+y_o^2)$. Ce plan sera noté $\mathrm{P}_\Pi(M_o)$.*
□

Preuve En effet, les deux expressions *équivalentes* :

$$x_o^2 + y_o^2 - 2ax_o - 2by_o + c = 0 \tag{1.17}$$

et

$$x_o a + y_o b - \frac{1}{2}c = \frac{1}{2}(x_o^2 + y_o^2) \tag{1.18}$$

expriment, la première, que le point $M_o(x_0, y_0)$ appartient au cercle σ de coordonnées (a, b, c), et la deuxième que (a, b, c) appartient au plan tangent au paraboloïde Π au point $M_0(x_0, y_0, x_0^2 + y_0^2)$. Donnons une justification de ce dernier résultat.

Considérons le paraboloïde Π comme surface paramétrée :

$$\begin{cases} a = x \\ b = y \\ c = x^2 + y^2 \end{cases} \tag{1.19}$$

Un point $S(a, b, c)$ appartient au plan tangent au paraboloïde Π au point $S_0(x_0, y_0, x_0^2 + y_0^2)$ si et seulement si $\overrightarrow{SS_0}$ est une combinaison linéaire des vecteurs de base $\frac{\partial S}{\partial x}(S_0)$ et $\frac{\partial S}{\partial y}(S_0)$, soit :

$$det \left| S\vec{S}_0, \frac{\partial \vec{S}}{\partial x}, \frac{\partial \vec{S}}{\partial y} \right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} (a - x_o) & 1 & 0 \\ (b - y_o) & 0 & 1 \\ (c - (x_o^2 + y_o^2)) & 2x_0 & 2y_0 \end{vmatrix} = 0$$

d'où l'expression 1.18.

□

Chaque plan $P_\Pi(M_o)$ partitionne Ω_2 en deux demi-espaces :
- L'ensemble des cercles qui se situent au-dessus du plan, tels que

$$2aa_o + 2bb_o - (c + a_o^2 + b_o^2) > 0$$

  qui ne contiennent pas le point M_o. Nous noterons $PS_\Pi(M_o)$ ce demi-espace et l'appellerons demi-espace supérieur.

- Le demi-espace inférieur, noté $PI_\Pi(M_o)$, qui correspond aux cercles contenant le point M_o (Fig 1.4).

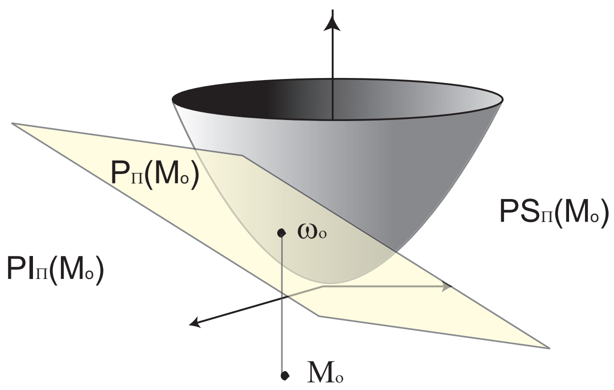


FIG. 1.4 – Plan tangent $P_\Pi(M_o)$ donnant la partition $PS_\Pi(M_o)$ et $PI_\Pi(M_o)$.

1.4.2 Plans polaires et cône tangent

Nous avons précédemment vu qu'il était possible, par dualité, d'associer à chaque point de Ω_2^p un hyperplan. L'hyperplan associé à un cercle $\sigma(a, b, c, 1)$ est un plan dans l'espace Ω_2, dit plan polaire. D'après l'équation 1.16, il a pour équation $ax+by-\frac{c}{2}-\frac{z}{2} = 0$ et sera noté $PP_\Pi(\sigma)$. Il regroupe l'ensemble des cercles orthogonaux au cercle σ.

L'intersection de $PP_\Pi(\sigma_o)$ et du paraboloïde Π est une ellipse notée $\epsilon(\sigma_o)$, constituée par l'ensemble des cercles points orthogonaux à σ_o. La projection de $\epsilon(\sigma_o)$ sur le plan $c = 0$ est le cercle associé à σ_o (Fig 1.6).

De plus, l'ensemble des tangentes à Π en $\epsilon(\sigma_o)$ menées par σ_o constitue un cône $S_\Pi(\sigma_o)$ séparant l'espace en quatre parties (Fig 1.7) :
- A : Le cône inférieur regroupant les cercles **contenant** le cercle σ_o.
- B : La partie du cône située sous le plan $P_\Pi(\sigma_o)$ dont tous les points représentent des cercles **intérieurs** à σ_o.

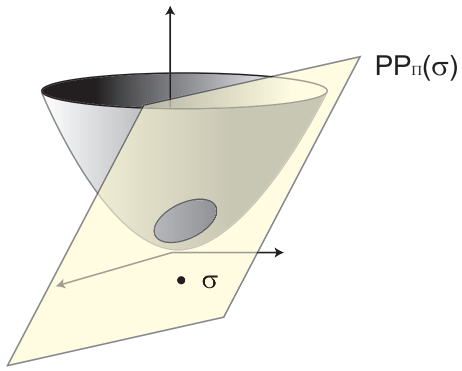


FIG. 1.5 – Cercle σ et plan polaire $PP_\Pi(\sigma)$.

- C : Le cône supérieur au-dessus du plan $P_\Pi(\sigma_o)$ pour les cercles qui **ne coupent pas** σ_o.
- D : L'extérieur de $S_\Pi(\sigma_o)$, pour tous les cercles qui **coupent** σ_o en 2 points éventuellement confondus.

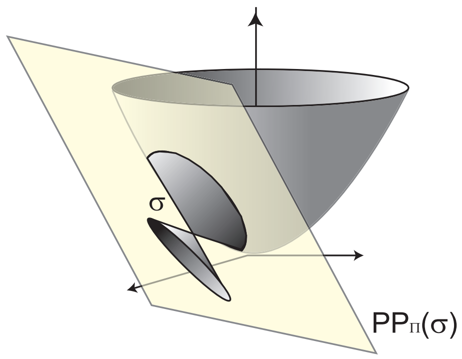


FIG. 1.6 – Cône tangent $S_\Pi(\sigma_o)$ associé à un cercle σ.

1.4.3 Les droites

1.4.3.1 Droites ne coupant pas Π

Propriété 3 *L'ensemble des cercles passant par deux points $M_1(x_1, y_1)$ et $M_2(x_2, y_2)$ correspond à une droite de l'espace Ω_2 qui ne coupe pas le paraboloïde Π. Un tel ensemble est appelé faisceau de cercles à points de base M_1 et M_2, noté $\Sigma_b(M_1, M_2)$ (Fig 1.8).* □

Preuve Un cercle qui passe par les points M_1 et M_2 appartient, dans l'espace des cercles, à la fois au plan $P_\Pi(M_1)$ et $P_\Pi(M_2)$.

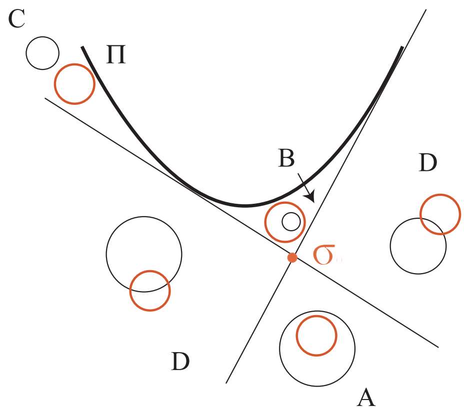


FIG. 1.7 – Coupe 2D de $S_{\Pi}(\sigma)$ illustrant la partition de l'espace en quatre parties.

Ainsi, la droite d'intersection des plans $P_{\Pi}(M_1)$ et $P_{\Pi}(M_2)$ correspond aux cercles du faisceau $\Sigma_b(M_1, M_2)$.

$$\begin{cases} x_1 a + y_1 b - \frac{1}{2}c = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + y_1^2\right) \\ x_2 a + y_2 b - \frac{1}{2}c = \frac{1}{2}\left(x_2^2 + y_2^2\right) \end{cases}$$

$\square$

La projection de la droite Δ sur le plan horizontal a pour équation :

$$(x_1 - x_2)\, a + (y_1 - y_2)\, b = \frac{1}{2}\left(x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2\right)$$

C'est la médiatrice du segment $[M_1 M_2]$. Cette droite est le lieu des centres des cercles du faisceau $\Sigma_b(M_1, M_2)$.

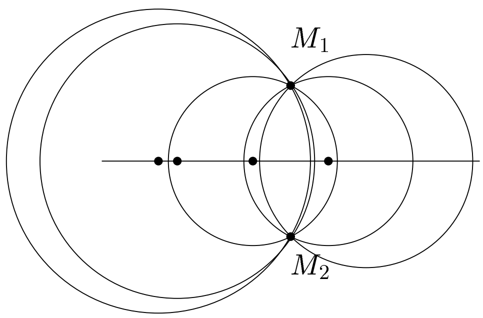


FIG. 1.8 – Faisceau de cercles à points de base $\Sigma_b(M_1, M_2)$.

1.4.3.2 Autres droites

Nous venons de voir qu'une droite qui ne coupe pas le paraboloïde Π correspond à un faisceau de cercles à points de base. Pour les autres droites de l'espace des cercles, il est possible de distinguer plusieurs cas (Fig 1.9) :

- (a) Une droite Δ verticale, coupant donc le paraboloïde en un point unique ω_o représente un faisceau de cercles *concentriques*.
- (b) Une droite Δ coupant le paraboloïde en 2 points ω_o et ω_1 représente un double faisceau de cercles inclus, dit faisceau de cercles *à points limites* $\Sigma_l(M_o, M_1)$, M_o et M_1 étant les projetés de ω_o et ω_1 sur le plan horizontal.
- (c) Une droite Δ tangente à Π représente un faisceau de cercles *tangents*.

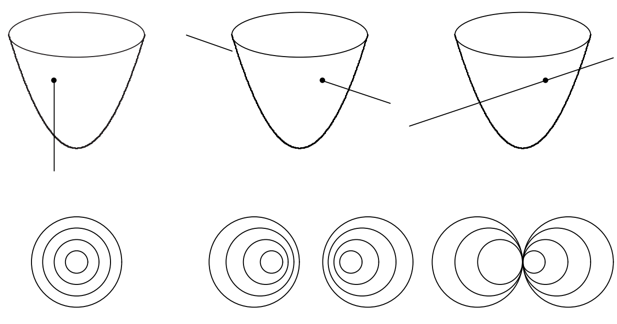


FIG. 1.9 – Différentes configurations de droites dans Ω_2 et les ensembles de cercles correspondants dans le plan.

1.4.3.3 l'axe radical de deux cercles

Définition 3 *Soit deux cercles σ_1 et σ_2 de centres différents. Le lieu des points M d'égale puissance par rapport à σ_1 et σ_2 est une droite $\delta_{(\sigma_1,\sigma_2)}$, appelée axe radical des cercles σ_1 et σ_2.[20]* □

Preuve La puissance du point $M(x, y)$ par rapport aux cercles $\sigma_1(a_1, b_1, c_1)$ et $\sigma_2(a_2, b_2, c_2)$, avec (a_1, b_1) différent de (a_2, b_2), peut s'écrire sous la forme :

$$p_1 = x^2 + y^2 - 2a_1x - 2b_1y + c_1 = -2 < M, \sigma_1 > \quad (1.20)$$
$$p_2 = x^2 + y^2 - 2a_2x - 2b_2y + c_2 = -2 < M, \sigma_2 > \quad (1.21)$$
$$\quad (1.22)$$

Si $p_1 = p_2$, alors :

$$x^2 + y^2 - 2a_1x - 2b_1y + c_1 = x^2 + y^2 - 2a_2x - 2b_2y + c_2 \tag{1.23}$$
$$2(a_2 - a_1)x + 2(b_2 - b_1)y = c_2 - c_1 \tag{1.24}$$

(1.24) est bien l'équation d'une droite orthogonale à la droite passant par les centres des cercles. □

Propriété 4 *L'axe radical $\delta_{(\sigma_1,\sigma_2)}$ est la projection sur le plan horizontal de l'intersection des plans polaires $PP_\Pi(\sigma_1)$ et $PP_\Pi(\sigma_2)$.* □

Preuve Les plans polaires $PP_\Pi(\sigma_1)$ et $PP_\Pi(\sigma_2)$ ont pour équations :

$$\begin{cases} a_1x + b_1y - \frac{c_1}{2} - \frac{z}{2} = 0 \\ a_2x + b_2y - \frac{c_2}{2} - \frac{z}{2} = 0 \end{cases} \tag{1.25}$$

La projection sur le plan horizontal de l'intersection de $PP_\Pi(\sigma_1)$ et $PP_\Pi(\sigma_2)$ est donc la droite d'équation :

$$a_1x + b_1y - \frac{c_1}{2} = a_2x + b_2y - \frac{c_2}{2} \tag{1.26}$$
$$2(a_1 - a_2)x + 2(b_1 - b_2)y = c_1 - c_2 \tag{1.27}$$
$$\tag{1.28}$$

On retrouve alors l'équation 1.24 de $\delta_{(\sigma_1,\sigma_2)}$.

□

Remarque : Cette propriété peut aussi s'énoncer de la manière suivante : l'axe radical $\delta_{(\sigma_1,\sigma_2)}$ est le lieu des centres des cercles (réels ou imaginaires) orthogonaux aux cercles σ_1 et σ_2.

Propriété 5 *Soient trois cercles σ_1, σ_2 et σ_3. Les axes radicaux $\delta(\sigma_1,\sigma_2)$, $\delta(\sigma_2,\sigma_3)$ et $\delta(\sigma_1,\sigma_3)$ se coupent en un point appelé centre radical.* □

Le centre radical est le point du plan ayant même puissance par rapport à σ_1, σ_2 et σ_3. C'est aussi le centre du cercle orthogonal aux trois cercles, lorsqu'il existe.

Preuve Dans le cas général, les trois plans $PP_\Pi(\sigma_k)$ se coupent en un point unique. Selon que ce point est à l'intérieur ou à l'extérieur du paraboloïde Π, il existera ou non un cercle orthogonal aux trois cercles. Mais dans tous les cas, les coordonnées (a, b) de ce point d'intersection seront celles du centre radical. □

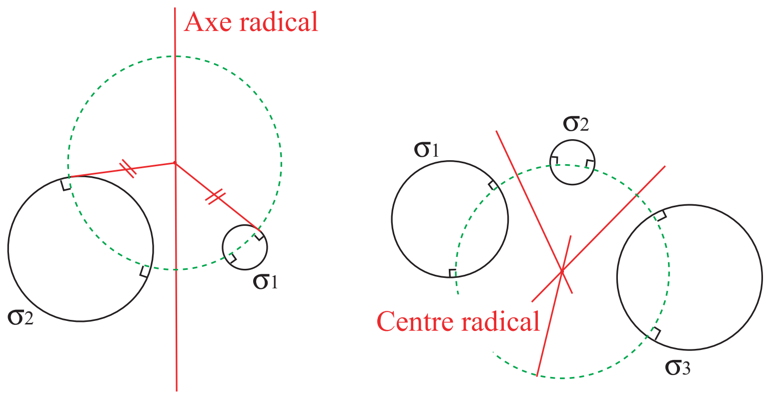


FIG. 1.10 – Axe radical de deux cercles et centre radical de trois cercles.

1.4.3.4 Faisceaux orthogonaux

Propriété 6 *Le faisceau de cercles à points limites* $\Sigma_l(M_1, M_2)$ *est orthogonal au faisceau de cercles à points de base* $\Sigma_b(M_1, M_2)$*. Leurs axes radicaux sont orthogonaux et le lieu des centres des cercles de l'un est axe radical de l'autre.* □

Les figures 1.9 et 1.11 illustrent deux faisceaux orthogonaux dans le plan et dans l'espace des cercles dans Ω_2. $\Sigma_b(M_1, M_2)$ est la droite d'intersection des plans $P_\Pi(\omega_1)$ et $P_\Pi(\omega_2)$.

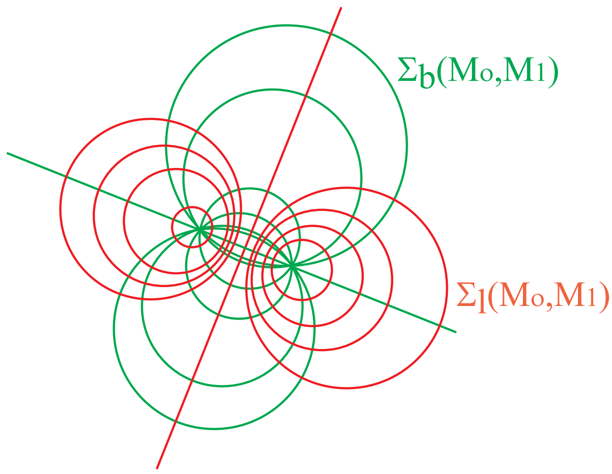


FIG. 1.11 – Deux faisceaux orthogonaux dans le plan, l'un à points de base (Σ_b) et l'autre à points limites (Σ_l).

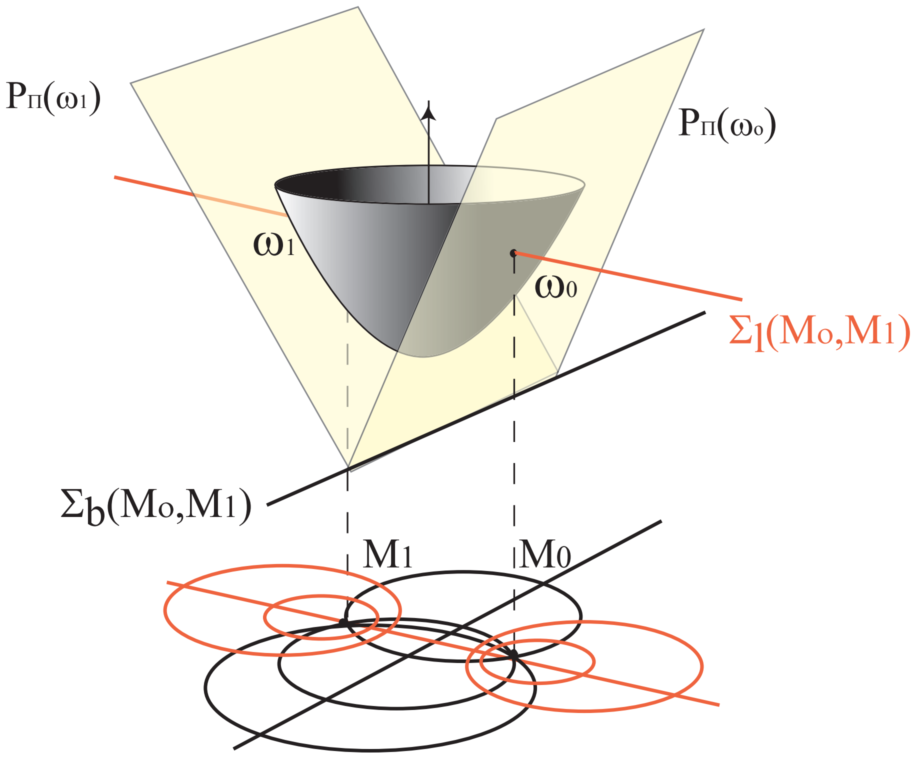


Fig. 1.12 – Les deux faisceaux orthogonaux, dans l'espace des cercles, correspondent à deux droites orthogonales.

1.5 Conclusion

Nous venons de voir que l'espace Ω_2^p des cercles du plan, rendu projectif (ce qui permet notamment d'y inclure les droites du plan) est fortement structuré par la polarité vis-à-vis d'une certaine quadrique, le paraboloïde Π.

Ce n'est pas le seul espace de cette espèce, comme l'a montré Elie Cartan. A titre d'exemple, mais aussi parce qu'il s'agit d'une représentation qui sert dans certains domaines de la synthèse d'image, citons un autre de ces espaces : l'espace des droites de $\mathbb{R}^3$, paramétrées par leurs coordonnées plückeriennes : $(p_0, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5)$, est structuré par la polarité vis-à-vis de l'hyper quadrique :

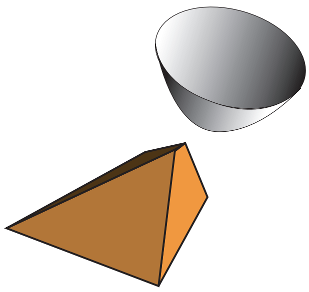
$$p_0 p_3 + p_1 p_4 - p_2 p_5 = 0 \tag{1.29}$$

Nous allons voir dans le chapitre suivant quelques applications de l'espace des cercles.

Chapitre 2

Algorithmes géométriques vus à travers Ω_2.

L'espace des cercles Ω_2 est un outil privilégié pour décrire, visualiser et développer de nouveaux algorithmes, touchant notamment à la tessellation de Voronoï et au diagramme des plus proches voisins. Nous allons en particulier décrire, dans l'espace Ω_2, une approche originale consistant à positionner le problème du cercle circonscrit minimum dans le cadre de la programmation linéaire.



2.1 Introduction

La géométrie algorithmique a pour but l'étude d'algorithmes efficaces permettant de traiter les objets de nature géométrique présents dans de nombreuses applications parmi lesquelles la C.A.O. [1] [32], la synthèse d'image, l'imagerie médicale ou encore la robotique. Pour ce domaine de recherche, l'espace des cercles est à la fois un espace de représentation privilégié et un outil permettant de concevoir de nouveaux algorithmes.

Dans une première partie, nous nous intéresserons au diagramme de Voronoï[55], concept central en géométrie algorithmique. L'espace des cercles permet de développer un algorithme simple pour construire ce diagramme [39] [26]. Nous verrons qu'il est possible d'étendre cet algorithme au diagramme des plus proches voisins. Les démonstrations seront principalement de nature géométrique et s'appuieront sur les propriétés vues au chapitre précédent.

Le problème du cercle circonscrit minimum est le sujet de la deuxième partie. Les calculs d'intersections entre deux formes ou entre une droite et un objet sont cruciaux en géométrie algorithmique ou en synthèse d'image. Pour diminuer le temps de calcul, on recherche des "ensembles englobants" de forme suffisamment simple pour déterminer en quelques tests si deux objets ont une intersection non vide, nécessitant seulement dans ce cas une poursuite d'algorithme plus complexe. Dans le cas contraire, le problème est résolu. L'ensemble englobant peut être de forme rectangulaire ou circulaire ; d'où l'intérêt de calculer le plus petit cercle circonscrit à un ensemble de points. D'autres applications sont directement liées à ce problème (détermination et calcul de paramètres de forme...).
Nous verrons comment la formulation géométrique de cette question dans l'espace des cercles permet de se ramener à un problème d'optimisation linéaire sous contrainte ; nous donnerons plusieurs algorithmes permettant de déterminer ce cercle.

2.2 Le diagramme de Voronoï

2.2.1 Définition

Soit un ensemble fini de points $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, ..., P_n\}$ dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$. A chaque point P_i peut être associée une zone du plan $V(P_i)$ qui est l'ensemble des points qui sont plus proches de P_i que de n'importe quel autre point de $\mathcal{P}$ (Fig. 2.1).

Définition 4 *On appelle diagramme de Voronoï, associé à l'ensemble de points* $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, ..., P_n\}$*, et noté* $V(\mathcal{P})$*, la partition*[2] *du plan formée par l'ensemble des cellules* $V(P_i)$ *[55].* □

[1] Conception Assistée par Ordinateur.
[2] A un ensemble de mesure nulle près : l'ensemble des côtés.

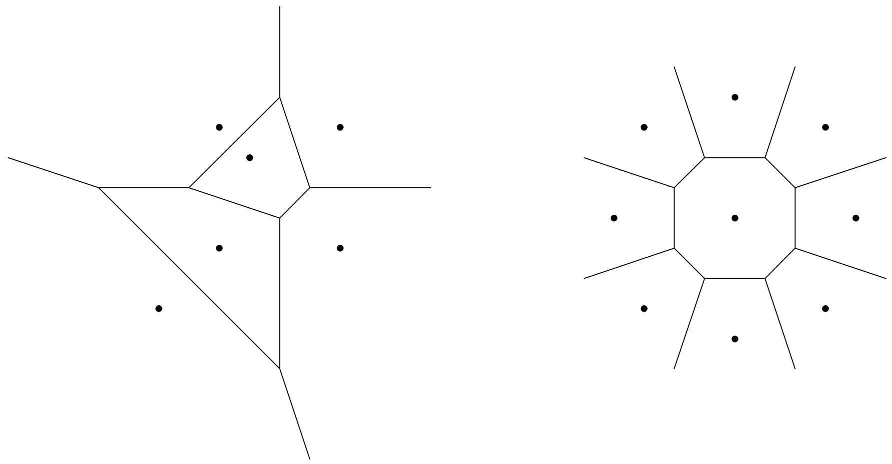


FIG. 2.1 – Exemples de diagrammes de Voronoï

En excluant le cas particulier où trois des points P_k seraient alignés, le diagramme de Voronoï est constitué de segments et de demi-droites. Les cellules sont bornées sauf celles qui sont associées aux points appartenant à l'enveloppe convexe du nuage.

Une cellule du diagramme de Voronoï peut aussi être définie en tant qu'intersection finie de demi-espaces (ce qui prouve que cette cellule est convexe). A chaque couple de points (P_i, P_j) est associée une médiatrice δ_{ij}, séparant le plan en deux demi-espaces : h_{ij} contenant P_i, et h_{ji} contenant P_j. La cellule associée au point P_j est alors l'intersection de tous les demi-espaces contenant P_j :

$$V(P_j) = \bigcap_{i \in \mathbb{N}, i \neq j} h_{ji} \tag{2.1}$$

Il est possible de généraliser la définition 4 au diagramme des k-plus proches voisins (k-PPV). A chaque sous-ensemble $\{P_{f(1)}, ..., P_{f(k)}\}$ de k points de $\mathcal{P}$, est associée une zone du plan $V(\{P_{f(1)}, ..., P_{f(k)}\})$. Les points M associés à cette cellule sont tels que, lorsqu'on classe les points P par distance croissante, ce sont les points $\{P_{f(1)}, ..., P_{f(k)}\}$ qui sont en tête du classement (le diagramme de Voronoï est le 1-PPV). Le résultat est, comme précédemment, une partition du plan en polygones convexes. Ainsi pour chaque sous-ensemble $\{P_{f(1)}, ..., P_{f(k)}\}$ de k points de $\mathcal{P}$, est associée une zone du plan $V(\{P_{f(1)}, ..., P_{f(k)}\})$. Potentiellement, il existe C_n^p cellules, mais beaucoup sont vides.

Définition 5 *On appelle diagramme des k plus proches voisins, associé à l'ensemble de points $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, ..., P_n\}$, et noté $k - PPV(\mathcal{P})$, la partition du plan formée par l'ensemble des cellules $V(\{P_{f(1)}, ..., P_{f(k)}\})$.* □

Une généralisation du diagramme de Voronoï consiste à pondérer les points $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, ..., P_n\}$ par les valeurs $\{r_1, r_2, ..., r_n\}$. On note alors $\sigma(P_i, r_i)$ le cercle centré en

P_i et de rayon r_i.

La cellule $V(P_i, r_i)$ est l'ensemble des points dont la puissance par rapport au cercle $\sigma(P_i, r_i)$ est inférieure aux puissances par rapport aux autres cercles $\sigma(P_j, r_j)$. L'ensemble des cellules ainsi définies crée une partition du plan en polygones convexes dont les côtés coïncident avec les *axes radicaux des cercles* $\sigma(P_i, r_i)$ (Fig. 2.7).

Définition 6 *On appelle diagramme de puissance [23] associé à l'ensemble des couples* $\mathcal{P} = \{(P_i, r_i)\}$, *et noté* $VP(\mathcal{P})$, *la partition du plan formée par l'ensemble des cellules* $V(P_i, r_i)$. □

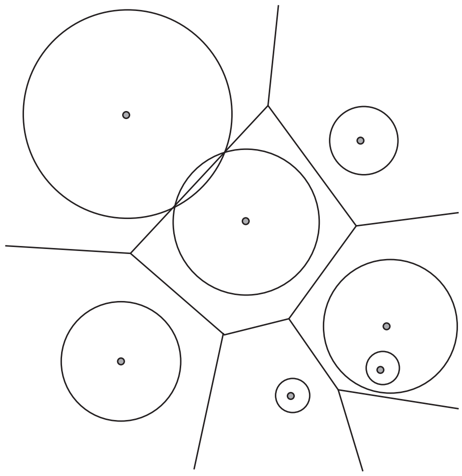


FIG. 2.2 – Exemple de diagramme de puissance.

2.2.2 Propriétés

2.2.2.1 Cercles centrés sur les cellules

Propriété 7 *L'ensemble des centres des cercles qui contiennent* P_i *et aucun autre point de* $\mathcal{P}$ *constitue la cellule de Voronoï* $V(P_i)$*(Fig. 2.3).*

□

Preuve Soit un cercle centré en c et de rayon r contenant le point P_i et aucun autre point de $\mathcal{P}$. La distance $d(c, P_i)$ entre c et P_i est inférieure à r, et les distances $d(c, P_j)$ pour $j \neq i$, sont supérieures à r. Donc c est plus proche de P_i que de n'importe quel autre point de $\mathcal{P}$, et appartient à $V(P_i)$.
Réciproquement, quel que soit le point P de $V(P_i)$, il existe toujours un cercle centré sur ce point contenant uniquement le point P_i (par exemple le cercle de diamètre : $d(P_i, c) + \min\limits_{j \neq i}(d(P_j, c)))$. □

Les cercles centrés sur les segments-frontière des cellules du diagramme $\mathcal{V}$ passent par deux points de $\mathcal{P}$. Les cercles centrés sur des noeuds passent par un nombre de points égal au degré [3] du noeud (Fig. 2.4).

Propriété 8 *Les centres des cercles qui contiennent l'ensemble des k points* $\{P_{f(1)}, ..., P_{f(k)}\}$ *et aucun autre point de* $\mathcal{P}$ *constituent la cellule* $V(\{P_{f(1)}, ..., P_{f(k)}\})$ *du diagramme k-PPV.* □

La démonstration est similaire à celle de la propriété précédente.

Propriété 9 *Les centres des cercles* σ *dont le produit scalaire est positif avec le cercle* $\sigma(P_i, r_i)$ *et négatif avec tous les autres cercles* $\sigma(P_j, r_j)$*, constituent la cellule* $V(P_i, r_i)$ *du diagramme de puissance.* □

Preuve Soit un cercle $\sigma(a, b, c, 1)$, de centre $P(a, b)$ et de rayon donné par $r^2 = a^2 + b^2 - c$. On suppose que ce cercle vérifie :

$< \sigma_i, \sigma >$ est positif et $\forall j \neq i, < \sigma_i, \sigma >$ est négatif.

On note $p(P/\sigma_i)$ la puissance du point P par rapport au cercle σ_i.

Il est facile de vérifier la relation suivante :

$$< \sigma, \sigma_i >= \frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{2}p(P/\sigma_i) \tag{2.2}$$

D'où les inéquations :

$$r^2 - p(P/\sigma_i) > 0 \tag{2.3}$$

$$r^2 - p(P/\sigma_j) < 0 \tag{2.4}$$

De ces deux relations, découle que :

$$\forall j \neq i, \; p(P/\sigma_i) < p(P/\sigma_j) \tag{2.5}$$

En d'autres termes, le point P appartient à la cellule $V(P_i, r_i)$.

De même, on démontre que pour tout point P de $V(P_i, r_i)$, il existe un cercle de centre P tel que $< \sigma, \sigma_i >$ soit positif et $< \sigma, \sigma_j >$ soit négatif. On pourra par exemple prendre le cercle de centre P orthogonal à σ_i. □

[3] degré : nombre d'arêtes concourantes en un noeud.

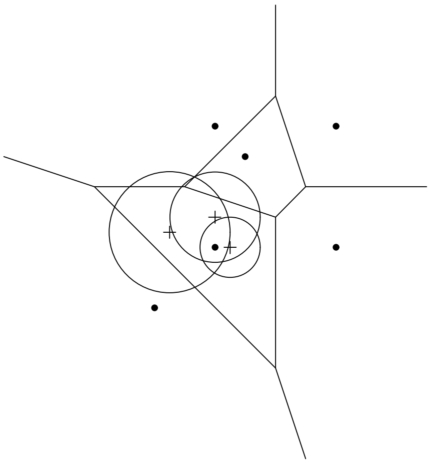


Fig. 2.3 – Exemples de cercles centrés dans une cellule et ne contenant qu'un point.

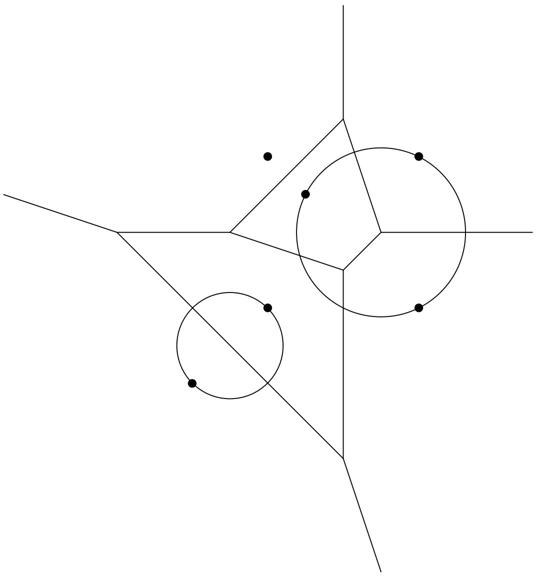


Fig. 2.4 – Exemples de cercles centrés sur les arêtes et sur les noeuds du diagramme de Voronoï.

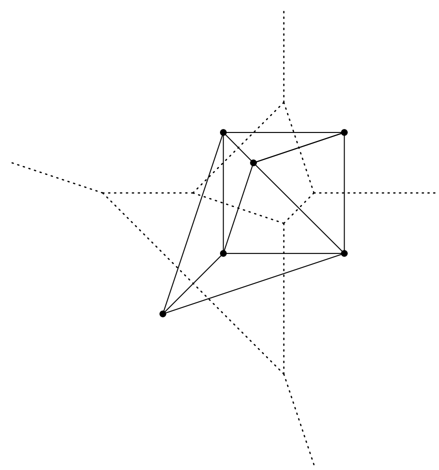


FIG. 2.5 – Exemple de triangulation de Delaunay.

2.2.2.2 Triangulation de Delaunay

Propriété 10 *Le diagramme dual du diagramme de Voronoï, noté $\mathcal{D}$, obtenu en joignant les "centres" des cellules contiguës, est une triangulation de l'ensemble $\mathcal{P}$, appelée triangulation de Delaunay. (Fig. 2.5)* □

Les noeuds du diagramme dual $\mathcal{D}$ sont définis par les points de $\mathcal{P}$ et les arêtes relient les points qui ont des cellules de Voronoï adjacentes.

La triangulation $\mathcal{D}$ présente de nombreuses propriétés dont certaines sont caractéristiques parmi toutes les triangulations :
– la triangulation de points coplanaires est un graphe planaire.
– le cercle circonscrit aux sommets d'un triangle de $\mathcal{D}$ ne contient aucun autre point de $\mathcal{P}$.
– $\mathcal{D}$ maximise le plus petit angle de la triangulation.

Nous ne détaillerons pas davantage cette triangulation qui est amplement traitée dans la littérature [35].

2.2.3 Lien avec l'espace des cercles Ω_2

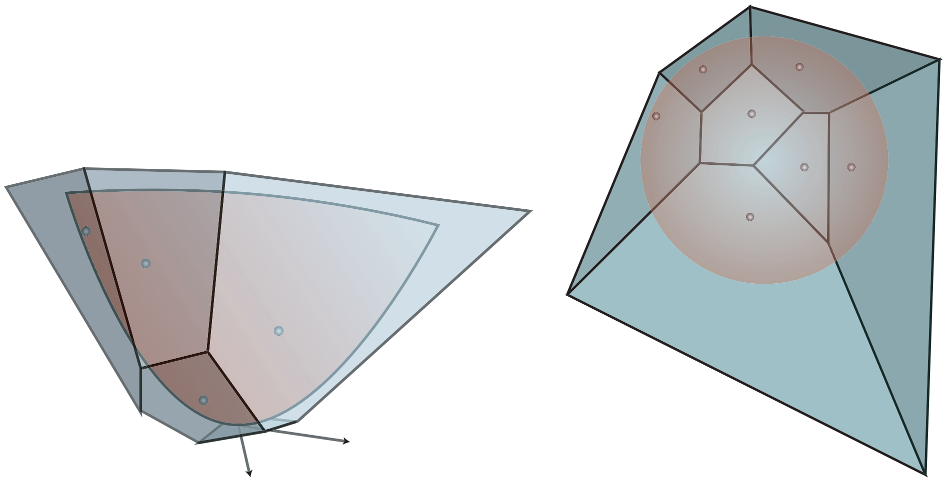
2.2.3.1 Construction du diagramme de Voronoï

Les algorithmes de construction directe [21][8] du diagramme de Voronoï ne font généralement pas référence à l'espace des cercles Ω_2. Nous allons montrer ici tout l'intérêt de raisonner dans cet espace.

D'après la propriété 7, une cellule $V(P_i)$ du diagramme regroupe l'ensemble des centres des cercles qui contiennent P_i et aucun autre point de $\mathcal{P}$. Dans l'espace Ω_2, l'ensemble des cercles passant par un point P_i est le plan tangent au paraboloïde $P_\Pi(P_i)$ défini dans le chapitre précédent.

Ce plan est ensuite restreint aux points situés au dessus des autres plans $P_\Pi(P_j)$, pour exclure les cercles contenant d'autres points de $\mathcal{P}$. On obtient alors un polygone formé par les intersections du plan $P_\Pi(P_i)$ avec les autres plans tangents. La projection de ce polygone sur un plan horizontal correspond à la cellule $V(P_i)$ (Fig. 2.6).

Pour l'ensemble des points P_i, le résultat est un polyèdre convexe formé par l'intersection de tous les demi-espaces supérieurs $PS_\Pi(P_i)$, dont la projection est le diagramme de Voronoï.



(a) (b)

FIG. 2.6 – Polyèdre convexe obtenu par intersection des demi-espaces PS_Π : (a) Vue latérale (b) Vue de dessus.

2.2.3.2 Construction du k-PPV

Pour le diagramme k-PPV, l'espace des cercles fournit, là encore, un outil de représentation et de construction très appréciable.

Les intersections des demi-espaces $PI_\Pi(P_i)$ créent dans l'espace Ω_2 des polyèdres convexes (Fig 2.7). A chacun d'eux correspondent les cercles qui contiennent un même sous-ensemble de points de $\mathcal{P}$. Donc, d'après la propriété 8, chaque polyèdre est associé à une cellule du type $V(\{P_{f(1)}, ..., P_{f(k)}\})$.

La partition k-PPV est obtenue en projetant sur un plan horizontal les cellules contenant k points.

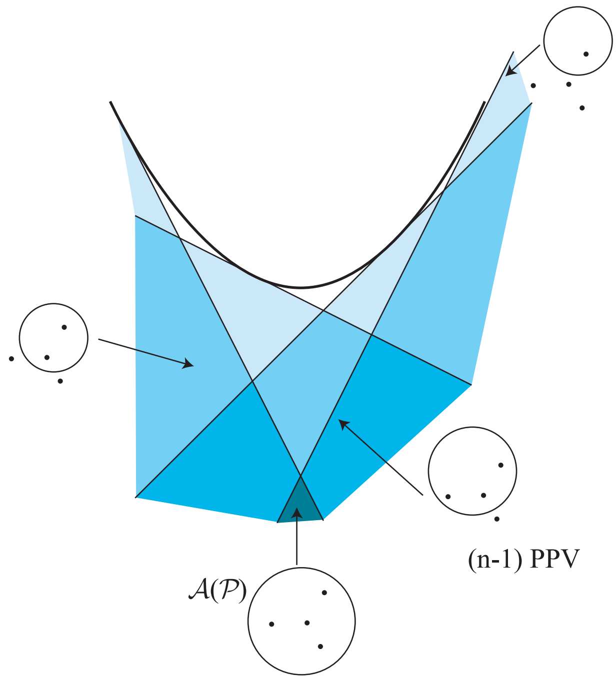


FIG. 2.7 – Coupe verticale de l'espace Ω_2 mettant en évidence les polyèdres formés par intersection des plans tangents. Chaque cellule est associée à un ensemble de points. Les cellules d'une même couleur forment "une couche" et correspondent à des cercles qui contiennent le même nombre de points du "nuage".

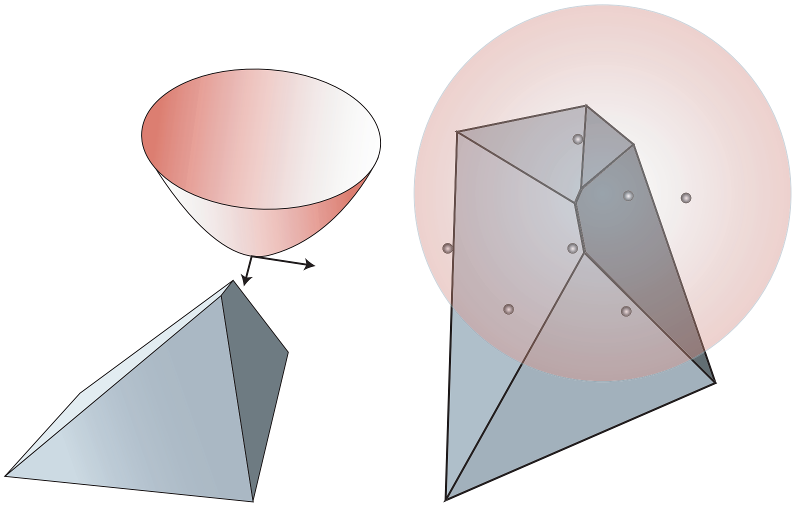
2.2.3.3 le (n-1)-PPV et le sous graphe.

Le polyèdre convexe, noté $\mathcal{A}(\mathcal{P})$, construit par intersection des demi-espaces inférieurs : $\bigcap_i PI_{\Pi}(P_i)$ (Fig. 2.8 (a)) présente de nombreuses propriétés.

Les points se trouvant dans $\mathcal{A}(\mathcal{P})$ correspondent aux cercles contenant *tous* les points de $\mathcal{P}$. Ceux qui appartiennent aux polyèdres ayant une facette commune avec $\mathcal{A}(\mathcal{P})$ contiennent $(n-1)$ points. La projection des arêtes du polyèdre sur un plan horizontal correspond donc au (n-1)-PPV (n étant le nombre de points du nuage). La structure obtenue est un arbre sans racine privilégiée [4] (Fig. 2.8 (b)).

Les arêtes de cet arbre représentent les centres des cercles passant par deux points et contenant tous les autres. Le nombre de points "alignés" sur un cercle associé à un noeud de l'arbre est égal au nombre d'arêtes concourantes. De manière générale, chaque classe de la partition ainsi obtenue associe un point du plan au point du nuage dont il

[4] Ce diagramme est connu sous le nom de Farthest Point Voronoi Diagram.



(a) (b)

FIG. 2.8 – Le convexe $\mathcal{A}$ obtenu par intersection des demi-espaces $PI_{\Pi}(P_i)$: représente l'ensemble des cercles contenant tous les points : (a) vue latérale (b) vue de dessus : on visualise le $(n-1)PPV$.

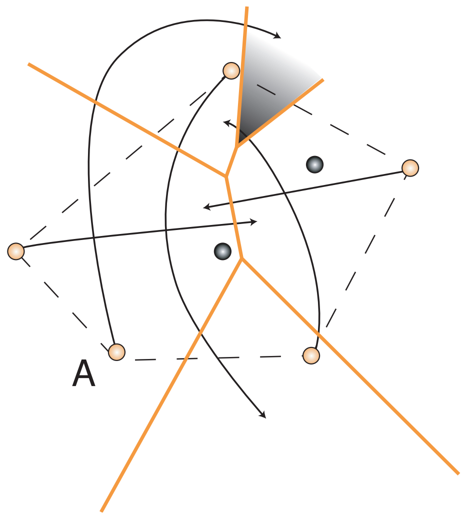


FIG. 2.9 – Le $(n-1)P.P.V.$: arbre obtenu par projection du convexe sur un plan horizontal avec correspondance "au plus éloigné". Ainsi le point A est associé à la zone grisée.

est le plus éloigné (Fig. 2.9).

Remarque : Seuls les points de l'enveloppe convexe du nuage interviennent dans la *structure de l'arbre et chaque branche infinie peut être associée à un segment du polygone de l'enveloppe convexe.*

2.2.3.4 Construction du diagramme de puissance

La propriété 9 permet de donner une construction du diagramme de puissance dans Ω_2^p. En effet, le plan polaire d'un cercle $PP_\Pi(\sigma)$ correspond à l'ensemble des cercles qui lui sont orthogonaux. Le produit scalaire entre σ et les cercles se situant au-dessus du plan $PP_\Pi(\sigma)$ est négatif, et positif dans le cas contraire.

Le diagramme de Voronoï pondéré est donc la projection sur un plan horizontal du polyèdre convexe formé par l'intersection des demi-plans supérieurs $PP_\Pi\sigma_i(P_i, r_i)$ (Fig. 2.10). C'est un résultat peu connu.

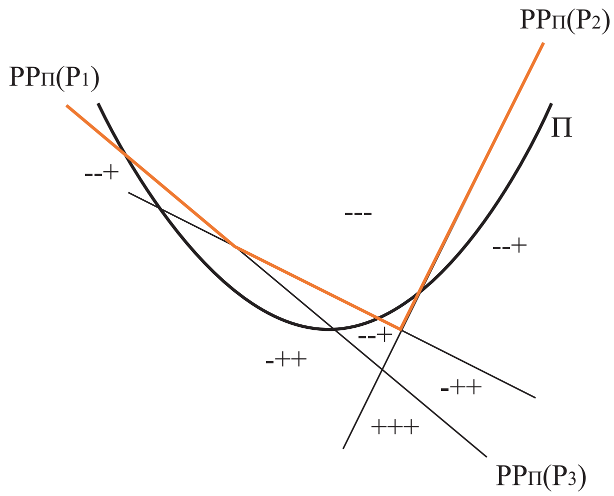


FIG. 2.10 – Coupe verticale de l'espace Ω_2 mettant en évidence les polyèdres formés par intersection des plans polaires. Les + et - indiquent les signes des produits scalaires entre les cercles de la cellule et les cercles $\sigma_i(P_i, r_i)$.

2.3 Problème du cercle circonscrit

2.3.1 Solution basée sur la morphologie mathématique

2.3.1.1 Algorithme

M. Jourlin et B. Laget [31] [34] ont développé un algorithme dit "de la fenêtre disquée" fournissant le centre du cercle circonscrit minimal à une forme binaire $\mathcal{F}$ basée sur les opérations de morphologie mathématique. Cette solution présente l'intérêt d'être simple, rapide et peut être appliquée à toute forme binaire digitalisée.

Rappelons-en le principe : La première étape consiste à choisir un cercle σ_R de rayon R supérieur au rayon du cercle circonscrit minimum. On note $G_R(\mathcal{F})$ l'ensemble des points où le cercle σ_R peut être centré et contenir entièrement la forme $\mathcal{F}$.

$G_R(\mathcal{F})$ est facilement déterminé en calculant l'intersection des cercles de rayon R centrés sur la frontière de $\mathcal{F}$ (Fig 2.11).

$$G_R(\mathcal{F}) = \{ \bigcap_{x \in Fr(\mathcal{F})} \sigma_R(x) \} \tag{2.6}$$

La deuxième étape consiste à recalculer $G_R(\mathcal{F})$ avec des rayons R de plus en plus petits. Lorsque le rayon du cercle circonscrit est atteint, $G_R(\mathcal{F})$ est réduit à un point qui correspond au centre du cercle circonscrit minimum. Pour limiter les calculs, en pratique, on recherche l'érodé ultime de $G_R(\mathcal{F})$.

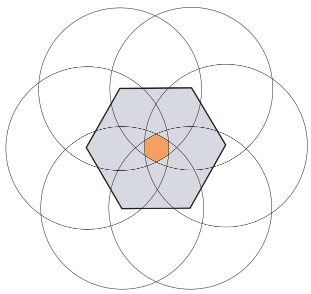


FIG. 2.11 – Ensemble $G_R(\mathcal{F})$ pour une forme polygonale.

2.3.1.2 Interprétation dans l'espace des cercles

L'algorithme précédent possède une interprétation intéressante dans Ω_2.

Prenons pour forme $\mathcal{F}$ un polygone défini par les points $\{P_i, i \in [\![1, n]\!]\}$.

Les cercles contenant $\mathcal{F}$ contiennent par définition chacun des points $\{P_i\}$. Nous avons vu précédemment que cet ensemble était représenté dans Ω_2 par le polyèdre $\mathcal{A}(\mathcal{F})$.

L'intersection de $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ avec le paraboloïde d'équation $c = a^2 + b^2 - R^2$ est associée à l'ensemble des cercles de rayon R et contenant la forme $\mathcal{F}$, et permet de déterminer $G_R(\mathcal{F})$ par projection sur un plan horizontal.

Eroder $G_R(\mathcal{F})$ par une boule de rayon r_e consiste à calculer l'intersection de $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ avec un paraboloïde ayant subi une translation de r_e^2 le long de l'axe c (i.e. d'équation : $c = a^2 + b^2 - R^2 - r_e^2$). On réitère l'opération jusqu'à obtenir un seul point de contact qui correspond alors au cercle circonscrit minimum. C'est le point de $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ qui minimise la distance verticale par rapport à Π (Fig. 2.12).

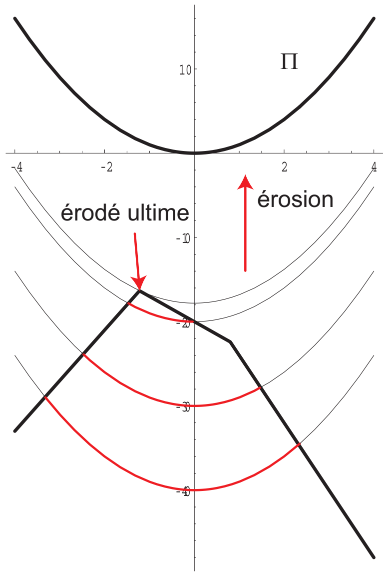


FIG. 2.12 – Recherche du cercle minimal par érosions successives. Représentation en coupe dans Ω_2 du paraboloïde Π et de certains de ses translatés.

2.3.2 Programmation linéaire

La recherche du cercle circonscrit à un nuage de points dans le plan (qui pourra s'étendre éventuellement à une dimension supérieure) peut se ramener à un problème de programmation linéaire dans le cadre de l'espace des cercles. Il est démontré que la complexité d'un algorithme "randomisé" [35] pour résoudre un tel problème est au moins $O(n \ln n)$. Nous vérifierons par un ensemble de simulations que notre implémentation permet d'atteindre ce type de complexité minimale.

2.3.2.1 Ensemble d'inéquations

Soit un ensemble H_n de n inéquations $h(i)$ dans $\mathbb{R}^d$.

$$\begin{cases} h(1): & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1d}x_d \leq b_1 \\ & \vdots \\ h(n): & a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nd}x_d \leq b_n \end{cases} \tag{2.7}$$

Chaque inéquation $h(i)$ sépare l'espace en deux demi-espaces. L'ensemble $\mathcal{S}_n$ des solutions de 2.7 est donc un convexe de $\mathbb{R}^d$ en tant qu'intersection de convexes.

Intéressons-nous à la complexité de l'algorithme permettant de déterminer $\mathcal{S}_n$. Une approche naïve du problème consiste à prendre en compte chaque inéquation successivement. L'intersection du demi-espace ajouté avec ceux déjà considérés est déterminée à chaque étape. La complexité de cet algorithme est $O(n^2)$. Cependant, la borne inférieure de la complexité est liée à celle de l'enveloppe convexe, soit $O(n \log n)$.

2.3.2.2 Optimisation linéaire sous contraintes

A l'ensemble des contraintes 2.7, ajoutons une condition d'optimisation linéaire :

$$f(x) = \max(c_1 x_1 + \cdots + c_d x_d) \tag{2.8}$$

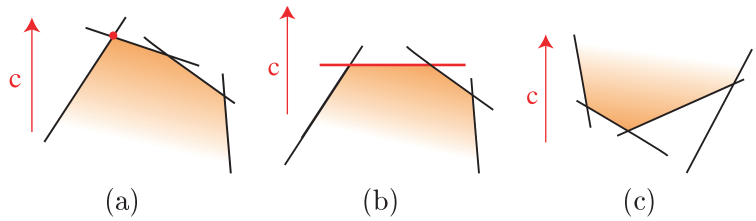


Fig. 2.13 – Différentes configurations d'un problème linéaire sous contraintes : (a) une unique solution (b) une infinité de solutions (c) aucune solution.

Convenons de noter c le vecteur de composantes $(c_1, c_2, ..., c_d)$.

Plusieurs cas peuvent se présenter (Fig. 2.13) :
- Il existe un seul point, noté ω_n, qui maximise la fonction.
- L'ensemble des points d'un segment est solution. Ce cas se présente lorsqu'une droite de H_n est orthogonale au vecteur.
- Il n'y a pas de solution (S_n n'est pas bornée dans la direction du vecteur c ou $\mathcal{S}_n$ est vide).

On se place dans le cas où il existe une solution unique au problème (Fig. 2.14).

Il faut donc déterminer le point ω_n qui maximise la fonction $f(x) = c_1 x_1 + \cdots + c_d x_d$ (i.e. le point "extremum" de $\mathcal{S}$ dans la direction c).

Il existe plusieurs algorithmes pour traiter ce problème avec une complexité de type $O(n)$, le plus utilisé étant l'algorithme du simplexe [14]. D'autres méthodes, basées sur des algorithmes dits "randomisés", sont plus simples à développer et sont particulièrement efficaces si la dimension d de l'espace est faible.

Nous allons illustrer cette dernière approche, donnée dans [35], pour un espace de dimension deux. Chaque inéquation $h(i)$ est associée à une droite $\delta(i)$. A chaque étape, une nouvelle droite $\delta(i)$ de H_n est ajoutée à l'ensemble G_{i-1} des droites déjà considérées dont le point optimal ω_{i-1} maximisant f est connu. Deux cas peuvent alors se présenter (Fig. 2.15) :

- Si le point ω_{i-1} vérifie la nouvelle inéquation ; il est alors également solution pour l'ensemble G_i, $\omega_i = \omega_{i-1}$.
- Sinon il faut calculer un nouveau point ω_i.

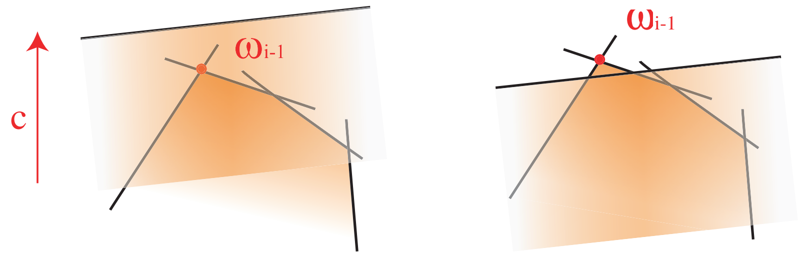


FIG. 2.14 – Ajout d'une nouvelle contrainte : (a) qui ne modifie pas le maximum (b) qui modifie le maximum.

Propriété 11 *Si le point optimal* ω_{i-1} *pour l'ensemble* G_{i-1} *ne vérifie pas l'inéquation* $h(i)$ *alors le point optimal* ω_i *pour* G_{i-1} *appartient à la droite* $\delta(i)$*.* □

Preuve La preuve est donnée dans [35]. Nous la reprenons ici, car elle permettra ultérieurement de justifier l'utilisation de cet algorithme dans un autre cadre.

On suppose que ω_i n'appartient pas à δ_i. ω_i appartient par définition à S_i, donc à S_{i-1} car $S_i \subset S_{i-1}$. Ainsi, le segment $[\omega_i, \omega_{i-1}]$ est contenu dans S_i, car S_i est convexe. Notons m le point d'intersection de $[\omega_i, \omega_{i-1}]$ et δ_i (m existe nécessairement car ω_i et ω_{i-1} sont de part et d'autre de δ_i).

La fonction f est strictement décroissante et $f(\omega_{i-1}) < f(\omega_i)$ donc $f(m) < f(\omega_i)$. Le point ω_i n'est pas optimal ; il y a contradiction : $\omega_i \in \delta_i$.

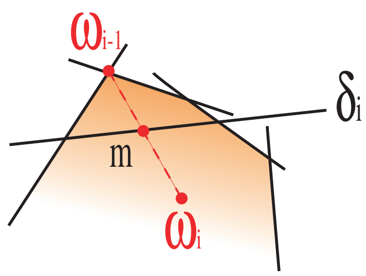


FIG. 2.15 – Calcul d'un nouveau point d'optimisation.

□

Le problème est ramené à un problème d'optimisation à une dimension qui est de complexité linéaire. La complexité de l'algorithme global est alors du type

$$\sum_{i=1}^{n} O(i) = O(n^2)$$

Cependant, lorsque la solution vérifie la nouvelle inéquation, aucun calcul d'intersection n'est effectué. Ainsi, suivant l'ordre d'ajout des droites H_n, le nombre de calculs d'intersections s'échelonne entre 1 et $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Comme il est impossible de connaître l'ordre optimal à l'avance, le fait d'ordonner de façon aléatoire les inéquations non encore considérées, avant chaque nouvelle étape de l'algorithme, conduit à une complexité linéaire en moyenne.

En effet, si nous notons X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si $h(i)$ remet en cause ω_{i-1}, 0 sinon, la complexité moyenne de l'algorithme s'écrit :

$$E[\sum_{i=1}^{n} O(i)X_i] = \sum_{i=1}^{n} E[O(i)X_i] = \sum_{i=1}^{n} O(i)E[X_i]$$

Or $E[X(i)]$ représente la probabilité pour que w_i appartienne à l'intersection entre $\delta(i)$ et une droite de G_{i-1}, soit :

$$E[X_i] = \frac{(i-1)}{C_i^2} = \frac{2}{i}$$

d'où un algorithme en $\Omega\left(\sum_{i=1}^{n} O(i)\frac{2}{i}\right) \simeq \Omega\left(2n\right)$, c'est-à-dire une complexité linéaire en moyenne.

Pour une dimension supérieure à deux, on peut créer un algorithme fondé sur un appel récursif à des solutions de problèmes similaires de dimension à chaque fois décroissante. La complexité reste ainsi linéaire.

2.3.3 Application à la recherche du cercle circonscrit minimum.

Ces dernières années, plusieurs algorithmes de complexité linéaire permettant de résoudre le problème du cercle circonscrit minimum, ont été proposés. L'un des plus intéressant s'appuie sur la recherche de valeur médiane [38] ; citons également [35] qui propose un algorithme randomisé de complexité moyenne linéaire.

L'espace des cercles fournit un cadre mathématique où le problème de la recherche du cercle circonscrit minimum à un nuage de points se ramène facilement à un problème de programmation linéaire. Nous allons voir comment la solution présentée au paragraphe précédent peut s'appliquer, pratiquement sans aucune modification.

L'ensemble des cercles qui contiennent tous les points d'un ensemble $\mathcal{P}$ est représenté, dans l'espace Ω_2, par le convexe $\mathcal{A}\{\mathcal{P}\}$. L'ensemble des demi-espaces $PI_{\Pi}(P_i)$ est en correspondance directe avec les contraintes h_i.

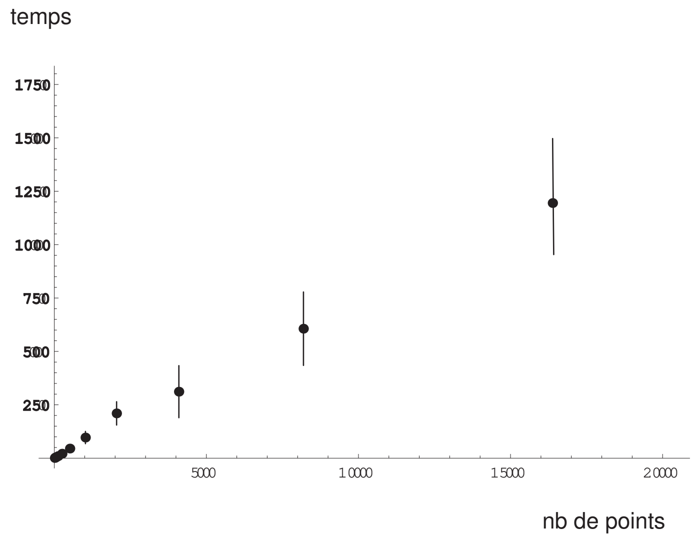


FIG. 2.16 – Vérification expérimentale de la tendance linéaire en moyenne. Temps de détermination du cercle circonscrit minimum en fonction du nombre de points.

La différence réside dans la fonction d'optimisation qui n'est plus linéaire $f(x) = x_1c_1 + ... + x_dc_d$ mais quadratique $f(x) = x^2 + y^2 - z$ car on recherche le cercle de rayon $r = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$ minimum. Mais la propriété (4) reste valable car même si la fonction f n'est plus strictement décroissante, sa convexité est une propriété suffisante.

L'algorithme décrit précédemment peut donc être utilisé presque directement ; il suffit de modifier la fonction d'optimisation f. Nous avons codé l'algorithme en C++ afin de vérifier que la progression du coût de calcul en fonction du nombre de points est linéaire (Fig. 2.16).

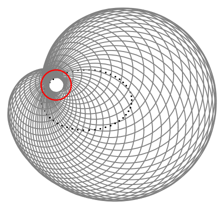
2.4 Conclusion

Nous avons vu, sur plusieurs exemples significatifs, à quel point l'espace Ω_2 permet une visualisation fine des ensembles de cercles, droites, points et de leurs propriétés, rejaillissant également sur la compréhension et/ou la création d'algorithmes performants.

Chapitre 3

Transformées en cercles

La Transformée de Hough ($T.H.$) est l'outil privilégié pour détecter des droites en traitement d'image, grâce à sa propriété d'échange d'alignement de points en intersection de sinusoïdes. Les Transformée en Cercles ($T.C.$) introduites dans [3] sont des transformées analogues à la $T.H.$, dans lesquelles les sinusoïdes sont remplacées par des cercles. De ce fait, elles bénéficient du cadre géométrique riche de Ω_2, ce qui va notamment permettre d'amener la recherche de la droite d'alignement optimale à une démarche de type "moindres puissances de cercles".



3.1 Introduction

Dans un grand nombre d'applications de traitement d'image (pour des systèmes de contrôle ou de localisation par exemple) la détection de droites est un problème essentiel. Notre cerveau est capable, assez facilement, de percevoir dans une scène un alignement, même imparfait. D'un point de vue algorithmique, le problème est beaucoup plus difficile.

La Transformée de Hough (T.H.), inventée à cette fin en 1962 par un ingénieur américain [2][16], est une des plus connues et utilisées en traitement d'image. Son principe repose sur l'échange des alignements de points en intersections de courbes sinusoïdales, plus faciles à détecter. Il en découle un algorithme facilement programmable et rapide, et disponible sur des composants électroniques dédiés. Cependant, l'incertitude liée à la droite détectée reste difficile à estimer. De plus, les propriétés géométriques des sinusoïdes sont assez pauvres...

D'autres solutions peuvent être envisagées, telles que les transformées en cercle que nous définirons dans ce chapitre. Elles possèdent, comme la T.H., la propriété d'échange des alignements en intersections de courbes, les sinusoïdes étant remplacées par des cercles. Grâce à leurs propriétés géométriques, il est possible d'établir un lien avec l'espace Ω_2 vu précédemment, ainsi qu'avec la méthode d'optimisation des moindres carrés.

3.2 La Transformée de Hough

3.2.1 Définition

Deux paramètres sont nécessaires pour définir une droite δ dans le plan. Dans le cadre de la *T.H.*, on utilise les coordonnées polaires du point H, projection de l'origine O sur la droite δ (Fig. 3.1), et on note :
- ρ la distance (O, H)
- θ l'angle $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OH})$.

L'équation d'une droite de paramètres (ρ, θ) est alors :

$$x \cos\theta + y \sin\theta = \rho \tag{3.1}$$

Preuve Un point $P(x, y)$ du plan appartient à la droite $\delta_{(\rho,\theta)}$, si

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OH}).\overrightarrow{OH} &= 0\\ (\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{OH}) = \left\|\overrightarrow{OH}\right\| &= \rho\\ x\cos\theta + y\sin\theta &= \rho.\end{aligned}$$

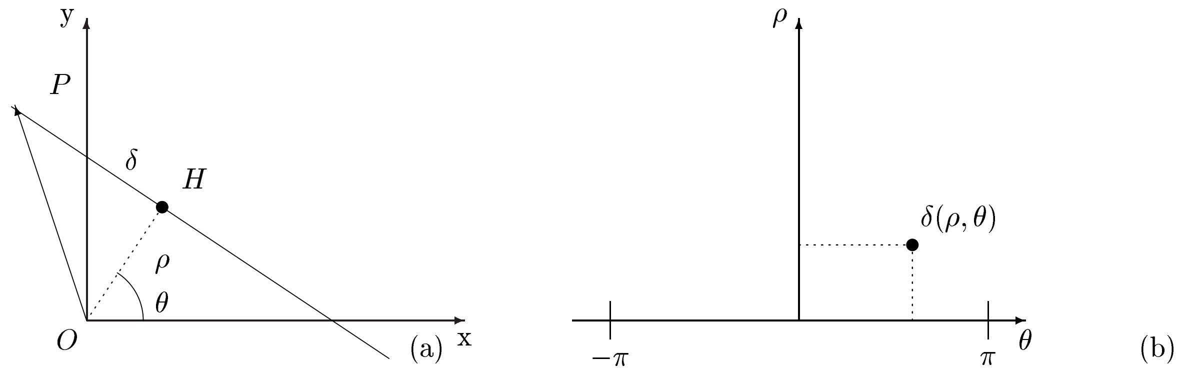


FIG. 3.1 – (a) Droite du plan de paramètres ρ et θ (b) représentation dans l'espace de Hough.

□

La T.H. est une transformation **point-droite**. Elle associe de façon bijective une droite δ du plan à un point dont les coordonnées, dans un espace dit auxiliaire ou de Hough, sont les paramètres (ρ, θ) de δ.

Définition 7 *La transformée de Hough associe à la droite d'équation* $x\cos(\theta_0) + y\sin(\theta_0) = \rho_0$ *avec* $[\theta_0, \rho_0] \in [-\pi, \pi[\times \mathbb{R}^+$ *le point de coordonnées* (θ_0, ρ_0) □

3.2.2 Propriétés

3.2.2.1 Faisceau de droites

Un faisceau regroupe l'ensemble des droites passant par un point M de coordonnées polaires (ρ_M, θ_M) du plan. Cette notion joue un rôle central dans la T.H.

Propriété 12 *Dans l'espace de Hough, le faisceau de droites concourantes au point* $M(\rho_M, \theta_M)$ *est représenté par la courbe sinusoïdale d'équation :*

$$\rho_M \cos(\theta - \theta_M) = \rho \tag{3.2}$$

□

Preuve La preuve est immédiate. Les paramètres (ρ, θ) des droites passant par le point $M(\rho_M, \theta_M)$ vérifient la relation $\rho_M \cos(\theta - \theta_M) = \rho$ (voir Fig. 3.2). □

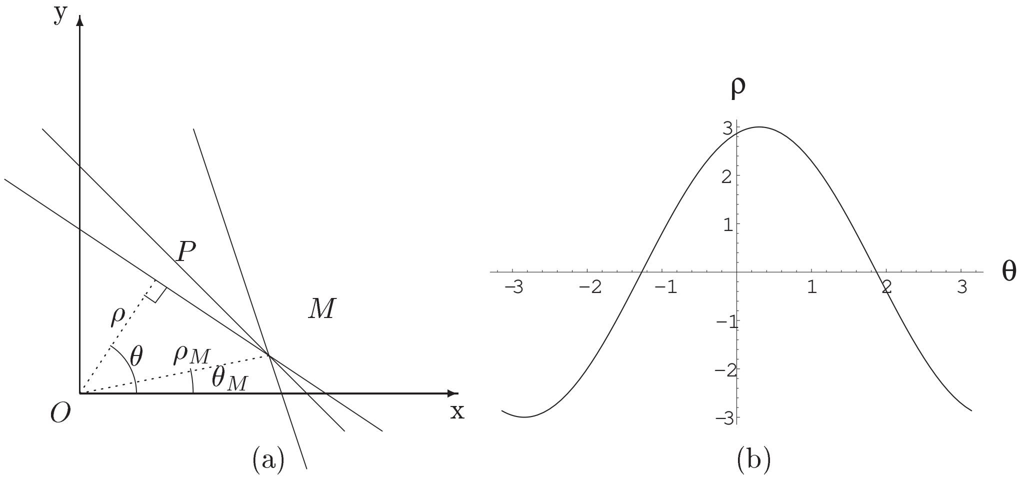


FIG. 3.2 – (a) Faisceau de droites passant par M(b) Son image dans le plan de Hough est une sinusoïde.

3.2.2.2 Alignement-intersection

Propriété 13 *L'image dans l'espace de Hough d'un ensemble de points alignés sur une droite de paramètres* $(\rho_\Omega, \theta_\Omega)$, *est un ensemble de courbes sinusoïdales concourantes au point* $(\rho_\Omega, \theta_\Omega)$. □

Nous appellerons "*A.P.I.C.*" cette propriété Alignement de Points-Intersection de Courbes car un alignement est échangé avec une intersection. C'est la propriété fondamentale de la *T.H.* utilisée par les algorithmes détectant les droites dans une image binaire.

Preuve Soit un ensemble de points $\Omega = \{P_1, P_2, ...P_n\}$ alignés sur la droite δ_Ω de paramètres $(\rho_\Omega, \theta_\Omega)$. D'après la propriété 12, l'image du faisceau de droites associé à chaque point P_i est la sinusoïde d'équation $\rho_i \cos(\theta - \theta_i) = \rho$. La droite δ_Ω est commune à tous les faisceaux car elle passe par tous les points P_i. Les sinusoïdes sont donc concourantes au point $(\rho_\Omega, \theta_\Omega)$ correspondant à la droite δ_Ω. □

3.2.3 Programmation

La *T.H.* est facilement programmable. L'espace de représentation est assimilé à un accumulateur (tableau d'entiers à deux dimensions) ce qui nécessite un échantillonnage des paramètres ρ et θ. Chaque pixel appartenant à un objet de l'image de départ peut être associé à un faisceau de droites, donc à une sinusoïde dans le plan de Hough. On incrémente les valeurs des cases du tableau par lesquelles passent ces sinusoïdes (Fig. 3.4).

A l'issue du traitement, les intersections auront créé des accumulations significatives du

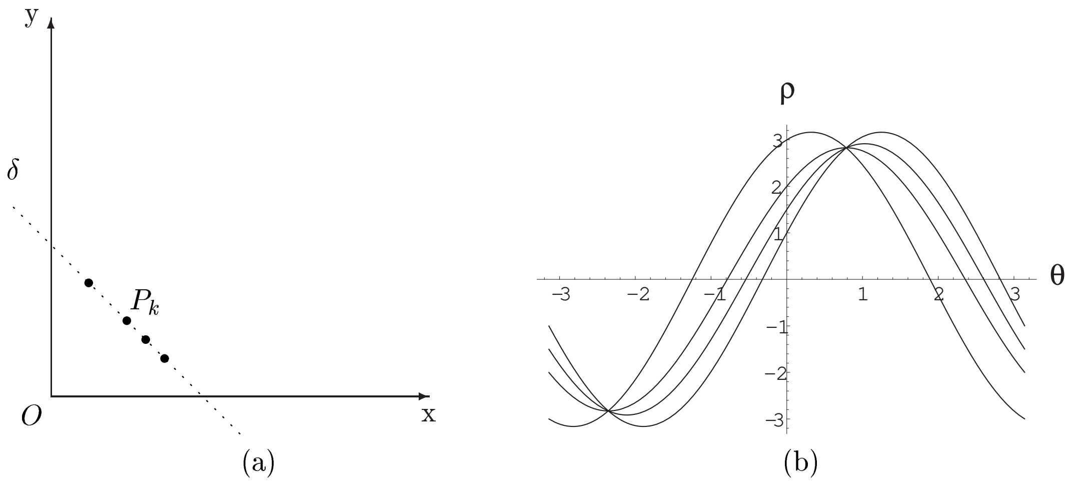


FIG. 3.3 – (a) Points alignés (b) Sinusoïdes concourantes.

fait de de la propriété 13 et pourront être détectées par seuillage. Les sinusoïdes peuvent être "épaissies" pour permettre de détecter plus facilement des alignements imparfaits. Dans ce cas, on n'obtient pas un point d'accumulation unique mais un "cluster" de forme très variable (Fig. 3.5, 3.6, 3.7).

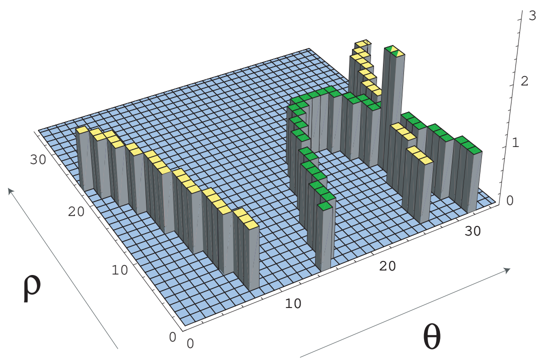


FIG. 3.4 – Algorithme de la transformée de Hough : représentation graphique des contenus des "accumulateurs" dans le cas de deux sinusoïdes, avec un pic à leur intersection.

Cependant, cet algorithme n'a de sens que dans le cadre discret et n'est pas directement relié à la théorie précédente, valable en continu et pour des alignements parfaits.

La différence entre un espace continu et discret soulève plusieurs questions :
- Comment choisir l'échantillonnage de l'espace de Hough ?
- Comment choisir le seuil de détection ?
- Comment peut-on estimer l'incertitude liée à la droite détectée ?
- Comment choisir le meilleur point du "cluster" ?

FIG. 3.5 – Image initiale à niveaux de gris.

Remarques : La T.H. peut être rapprochée de la Transformée de Radon qui, à une image f, fait correspondre ses intégrales lignes : $R_f(\theta,\rho) = \int\limits_{y\in\theta^\perp} f(\rho\theta + y)dy$. *La T.H. est donc plus une approche analytique que géométrique des problèmes d'alignements.*

3.3 Transformées en cercle

3.3.1 Des sinusoïdes aux cercles

Reprenons l'équation de la propriété 12 avec ρ et θ vues comme coordonnées polaires d'une nouvelle courbe :

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

L'équation devient :

$$\rho = \rho_0\left(\cos\theta\cos\theta_0 + \sin\theta\sin\theta_0\right) \tag{3.3}$$
$$\rho^2 = \rho_0\rho\left(\cos\theta\cos\theta_0 + \sin\theta\sin\theta_0\right) \tag{3.4}$$

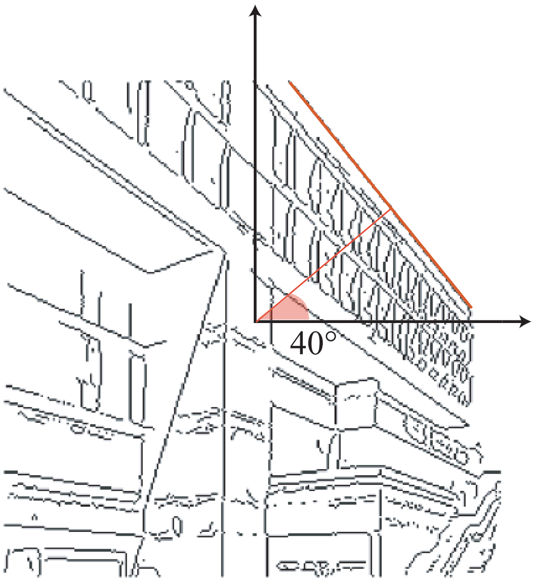


FIG. 3.6 – Contours de l'image de la figure 3.5 et exemple de droite détectée.

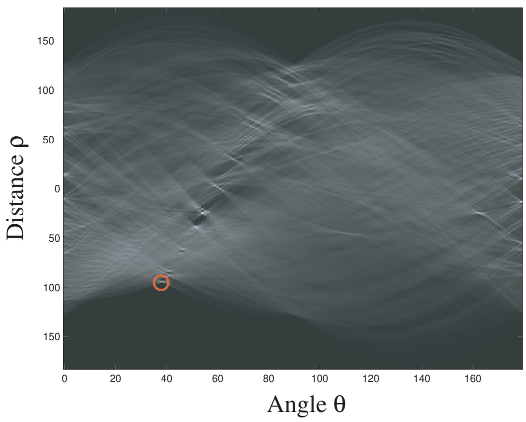


FIG. 3.7 – Le "sinogramme" de la Transformée de Hough de la figure 3.6, le pic cerclé correspond à la droite détectée.

$$x^2 + y^2 = xx_0 + yy_0 \tag{3.5}$$
$$x^2 + y^2 - y_0 y - x_0 x = 0 \tag{3.6}$$

Cette dernière équation correspond à un cercle de centre $\frac{1}{2}(x_0, y_0)$ qui passe par l'origine. On obtient ainsi une nouvelle transformée, dite transformée en cercle (T.C.), qui associe à un point de coordonnées $M(a, b)$, le cercle de centre M et de rayon $\sqrt{a^2 + b^2}$. En pratique, on fait subir à ce type de cercles une homothétie de rapport 2, en sorte que le centre devienne (x_0, y_0). Ainsi, l'équation 3.6 est remplacée par :

$$x^2 + y^2 - 2xx_0 - 2yy_0 = 0 \tag{3.7}$$

3.3.2 Définition

Il est possible de généraliser la transformée en cercle (T.C.) vue précédemment en modifiant la valeur du paramètre c dans l'équation 3.6 [4] [3]($c = 0$ pour les cercles passant par l'origine).

Définition 8 *La transformée en cercle de paramètre c (T.C.$_c$) associe au point $M(a, b)$ le cercle d'équation*

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0 \tag{3.8}$$

□

Remarque : Le rayon du cercle est alors $r = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$. Si c est positif, les points M pour lesquels $a^2 + b^2 - c < 0$ n'ont pas d'image.

On peut discerner 3 cas particuliers (Fig 3.8) :
- Si $c = 0$, le point $M(a, b)$ est associé au cercle de centre (a, b) passant par l'origine.
- Si $c < 0$, $M(a, b)$ est associé au cercle de centre (a, b) coupant, le cercle centré à l'origine et de rayon $\sqrt{-c}$ suivant un diamètre de ce cercle.
- Si $c > 0$, $M(a, b)$ est associé au cercle de centre (a, b) orthogonal au cercle centré à l'origine et de rayon $\sqrt{c}$.

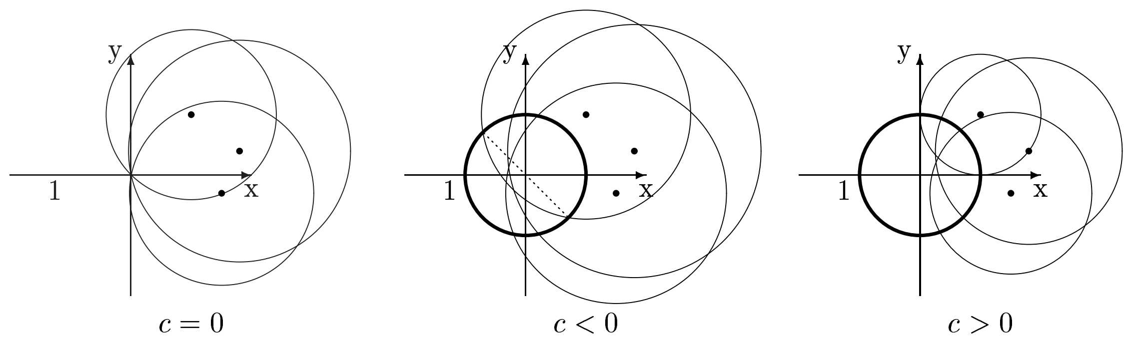


FIG. 3.8 – Images de trois points par $T.C._0$,$T.C._{-1}$ et $T.C._1$

3.3.3 Les différentes géométries

J.M. Becker [3] a montré qu'il était possible d'associer à chacun des trois cas cités ci-dessus ($c = 0, c < 0$ et $c > 0$) une géométrie différente.

- $c = 0$: **géométrie parabolique** (euclidienne). L'origine est exclue (elle représente l'infini). Par un point passe un seul cercle "parallèle" à un autre (au sens où ils ne s'intersectent pas à part à l'origine). La somme des angles d'un triangle est π.
- $c < 0$: **géométrie elliptique** (dite encore géométrie sphérique). Aucun cercle n'est "parallèle" à un autre, tous s'intersectent. La somme des angles d'un triangle est supérieure à π.
- $c > 0$: **géométrie hyperbolique** . Par un point passe une infinité de cercles "parallèles" à un cercle donné. La somme des angles d'un triangle est inférieure à π.

3.3.4 Lien avec l'espace des cercles

Vue dans l'espace des cercles Ω_2^p, la $T.C._c$ d'un point $p(a, b, a^2 + b^2, 1)$ est le point $\sigma(a, b, c, 1)$ représentant le cercle de centre (a, b) et de rayon $\sqrt{a^2 + b^2 - c}$ dans Ω_2^p.

Ainsi, pour chaque valeur du paramètre c, l'ensemble des cercles correspondants se trouve dans un plan horizontal. Les plans pour lesquels c est positif coupent l'intérieur "interdit" du paraboloïde Π suivant un disque de rayon $r = \sqrt{c}$ correspondant aux points qui n'ont pas d'image par la transformation $T.C._c$ (Fig 3.9).

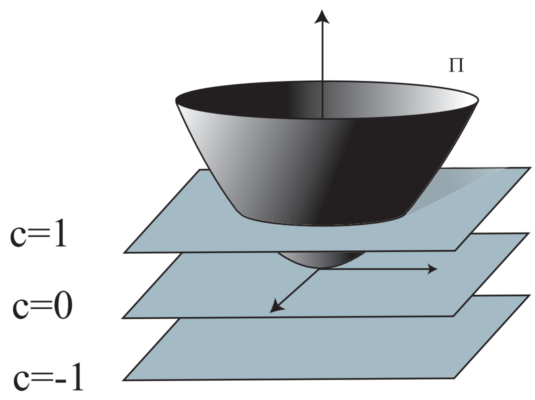


FIG. 3.9 – Les $T.C._c$ vues comme projections dans l'espace des cercles.

3.3.5 Image d'une courbe par $T.C._c$

Considérons une courbe paramétrée Γ_λ, de classe C^1 par rapport au paramètre λ.

$$\Gamma_\lambda \equiv \begin{cases} x(\lambda) \\ y(\lambda) \end{cases}$$

L'image par $T.C._c$ de chacun des points de cette courbe est un cercle d'équation $\sigma_\lambda(x, y) = x^2 + y^2 - 2x(\lambda) - 2y(\lambda) - c = 0$. L'ensemble de ces cercles constitue une famille dont l'enveloppe E (si elle existe) peut être considérée comme l'image de Γ_λ par

$T.C._c$. Un point appartient à E si il est à l'intersection de deux courbes Γ_λ infiniment proches :

$$\left\{\begin{array}{c}\sigma_\lambda(x,y)=0\\ \sigma_{\lambda+d\lambda}(x,y)=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}\sigma_\lambda(x,y)=0\\ \sigma_{\lambda+d\lambda}(x,y)-\sigma_\lambda(x,y)=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}\sigma_\lambda(x,y)=0\\ \frac{d\sigma_\lambda(x,y)}{d\lambda}=0\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{c}x^2+y^2-2x(\lambda)-2y(\lambda)+c=0\\ x^2+y^2-2\frac{dx(\lambda)}{d\lambda}-2\frac{dy(\lambda)}{d\lambda}+c=0\end{array}\right.$$

On obtient ainsi une nouvelle équation paramétrée par élimination du paramètre λ (lorsqu'elle est possible).

Les figures 3.10 et 3.11 montrent les enveloppes obtenues à partir d'une ellipse dans le cas des transformées $T.C._{-1}$ et $T.C._0$.

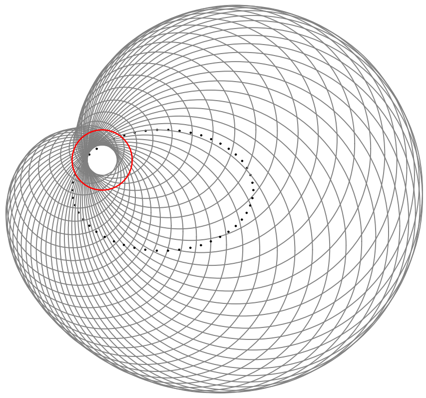


FIG. 3.10 – Image d'une ellipse en pointillés par $T.C._{-1}$.

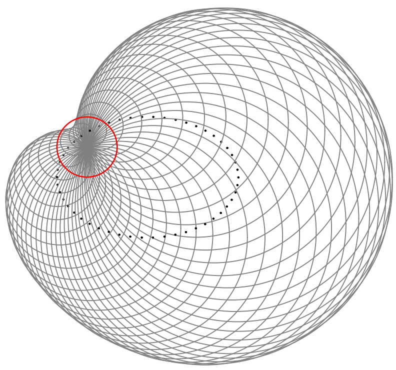


FIG. 3.11 – Image d'une ellipse par $T.C._0$.

3.3.6 Propriété A.P.I.C.

Tout comme la transformée de Hough, toutes les transformées en cercle ont la propriété *A.P.I.C.* Chaque alignement de points sur une droite δ est associé à un faisceau de cercles concourant en 2 points : J_+ et J_- (Fig 3.12).

Les points O, J_+ et J_- sont alignés, et la droite δ est la médiatrice du segment $[J_+J_-]$.

Propriété 14 *Si on note P le point d'intersection de $[J_+J_-]$ avec δ et x_+, x_-, p les abscisses des points J_+, J_- et P sur l'axe orienté (OP), alors on a la relation :*

$$x_\pm = p \pm \sqrt{p^2 - c} \tag{3.9}$$

□

Preuve Soit un ensemble de points $\{P_1, P_2, ...P_n\}$ alignés sur la droite δ d'équation $x\cos\theta + y\sin\theta = p$. Par $T.C._c$, à chaque point (a_i, b_i) est associé le cercle d'équation :

$$x^2 + y^2 - 2a_i x - 2b_i y + c \quad = \quad 0$$

soit en coordonnées polaires :

$$r^2 - 2r(a_i\cos\theta + b_i\sin\theta) + c \quad = \quad 0$$

Or les points $P_i(a_i, b_i)$ vérifient $a_i\cos\theta + b_i\sin\theta = p$. Donc finalement,

$$r^2 - 2rp + c \quad = \quad 0$$

D'où la relation 3.9. □

La transformée $T.C._c$ permet donc d'associer à chaque droite Δ du plan deux points correspondant à l'intersection des cercles images de Δ.

Remarque : L'information contenue dans le cercle $\mathcal{C}_{\sqrt{c}}$ (centré en O et de rayon $\sqrt{c}$) est en redondance avec celle contenue à l'extérieur du cercle (Il y a aussi redondance pour la T.H. si le paramètre ρ n'est pas restreint aux valeurs positives).

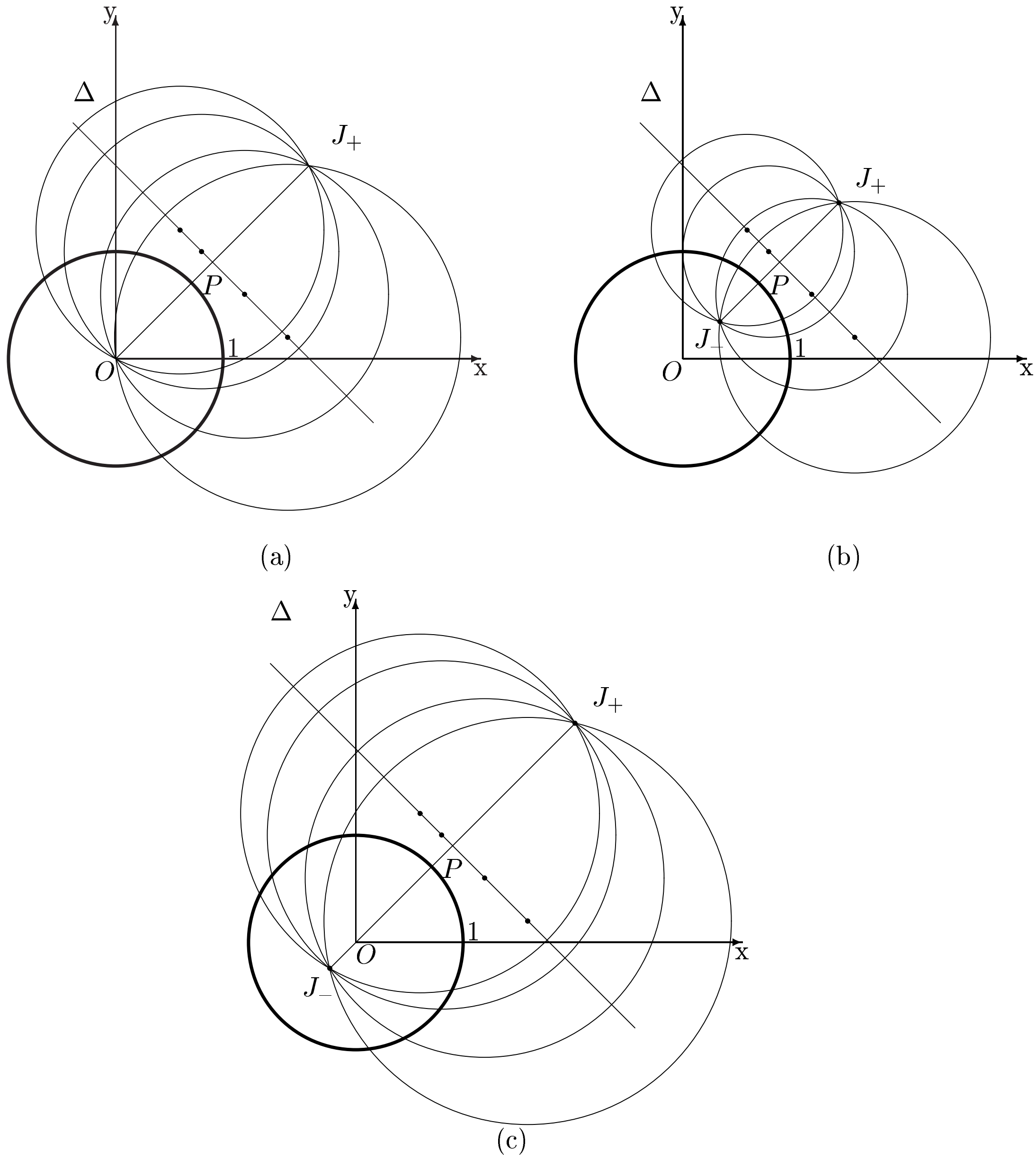


FIG. 3.12 – Illustration de la propriété A.P.I.C. de la $T.C._c$ (a) $c = 0$, (b) $c = 1$, (c) $c = -1$. On remarquera que J_- est confondu avec O dans le cas $c = 0$.

3.3.7 Lien avec la méthode des moindres carrés

Soit un point $M(a, b)$ du plan et une droite δ située à une distance t de l'origine. La distance e entre le point M et son projeté orthogonal H sur la droite δ peut être considérée comme une mesure de l'erreur d'alignement (Fig 3.13).

L'erreur e vérifie la relation :

$$e^2 = \frac{(ax+by-1)^2}{a^2+b^2} = (\frac{< M, \Delta >}{\|\Delta\|})^2$$

Remarque : Le produit scalaire utilisé a été défini au premier chapitre par la relation 1.12 avec M de coordonnées $(x, y, x^2+y^2, 1)$ et $\Delta(a, b, 2, 0)$.

Nous avons vu que tous les cercles associés aux points de δ par $T.C._c$ étaient concourants en deux points J_+ et J_-. Le point M n'étant pas sur δ, le cercle $T.C._c(M)$ ne passe pas par J_+ ou J_-. Cependant il existe une relation entre la distance e et la puissance du point J_+ par rapport au cercle $T.C._c(M)$:

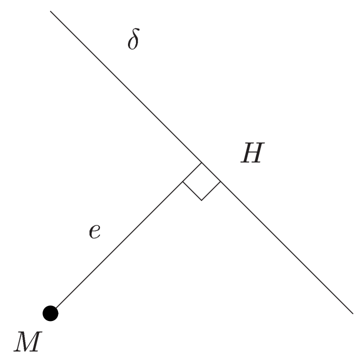


FIG. 3.13 – Erreur d'alignement entre le point M et la droite δ.

Propriété 15 *La distance du point M à la médiatrice Δ du segment $[J_+, J_-]$, appelée "erreur d'alignement" , vérifie la relation :*

$$e^2 = \left(\frac{< J_+, T.C._c(M) >}{2\left\|\overrightarrow{OJ_+}\right\|}\right)^2$$

□

Preuve Comme précédemment, on note $T.C._c(M)$ l'image de M, i.e. le cercle de centre M et de rayon $r = \sqrt{a^2+b^2-c}$ (Fig 3.14) et $J_\pm$ les points associés à Δ par $T.C._c$.

On note H' le projeté de M sur $[J_+, J_-]$, I l'intersection de Δ et $[J_+, J_-]$, t la distance I, J_+ et i la distance O, I.

Enfin, on note $\sqrt{p}$ la distance entre le point J_+ et le point de contact B de la tangente au cercle. p est donc la puissance du point J_+ par rapport au cercle.

Avec les notations de la figure 3.14, on a les carrés de normes suivants :

$$z^2 = r^2 + p \tag{3.10}$$
$$z^2 = (e+t)^2 + l^2 \tag{3.11}$$
$$r^2 + c = l^2 + (i-e)^2 \tag{3.12}$$

D'après (3.10) et (3.11)

$$p + r^2 \quad = \quad (e+t)^2 + l^2 \tag{3.13}$$

Soit en soustrayant (3.12) à (3.13)

$$p \quad = \quad (e+t)^2 + c - (i-e)^2 \tag{3.14}$$

Or d'après 3.9 :

$$i + t = i + \sqrt{i^2 - c} \tag{3.15}$$

D'où $t^2 = i^2 - c$. Ce qui donne en reportant cette valeur dans (3.14) :

$$p = 2e(i+t) \tag{3.16}$$

Soit

$$p = 2e \left\| \overrightarrow{OJ_+} \right\| \tag{3.17}$$

$\square$

Corollaire :

Donnons nous un ensemble fini de points $\{M_i\}$ du plan. La droite minimisant la somme des carrés des erreurs d'alignement est associée au point J qui minimise la somme :

$$\sum_i \left(\frac{< J, T.C.(M_i) >}{2 \left\| \overrightarrow{OJ_+} \right\|} \right)^2$$

Remarque : $< J_+, T.C.(M_i) >$ étant homogène à une distance au carré en tant que puissance, $\frac{<J,T.C.(M_i)>}{2\left\|\overrightarrow{OJ_+}\right\|}$ est bien homogène à une distance.

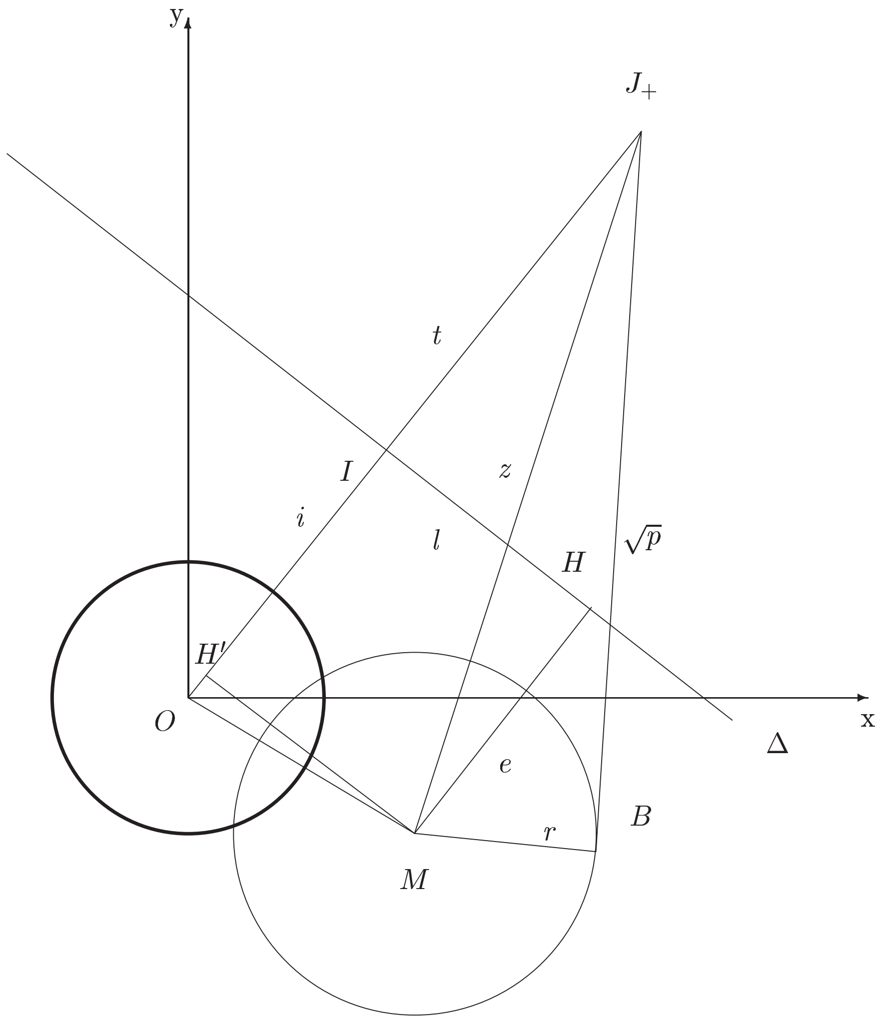


FIG. 3.14 – Illustration de la démonstration de l'erreur d'alignement. $i = IO$, $l = IH = H'M$, $t = IJ_+$, $e = MH = IH'$.

3.4 Conclusion

Depuis longtemps, le terme "Transformée de Hough" désigne, chez certains utilisateurs, une transformée passablement différente, que l'on appelle, pour la distinguer de la précédente "Transformée de Hough (τ, p)" (τ est une ordonnée à l'origine et p une pente). Elle consiste à associer à tout point (x, y) de la "scène" l'ensemble des droites $y = px + \tau$ passant par ce point, donc telles que :

$$\tau = y_0 - px_0 \tag{3.18}$$

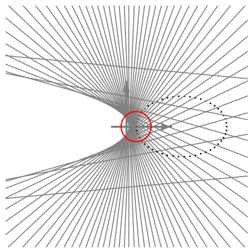
Cette expression est donc elle-même l'équation d'une droite dans un plan de coordonnées (τ, p) ; on montre facilement qu'à des points (x_k, y_k) alignés, correspondent des droites concourantes, exactement comme pour la Transformée de Hough classique.

Cette transformée continue à être utilisée, notamment en géologie et acoustique. Elle est cependant nettement moins riche que la Transformée Polaire [52] que nous allons introduire maintenant et qui elle aussi à tout point associe une droite.

Chapitre 4

La Transformée Polaire

La Transformée Polaire ($T.P.$) associe de manière bijective un point du plan à une droite [6]. Elle est liée aux $T.C._c$ par l'intermédiaire d'une transformation géométrique classique, l'inversion, et présente des propriétés similaires comme l'échange d'alignements en intersections (A.P.I.C) [5]. D'autres propriétés sont propres à la $T.P.$ comme la transformation de coniques en coniques, ou encore la représentation sous forme de faisceau de coniques de l'erreur d'alignement d'un nuage de points.



4.1 Introduction

Pour des raisons avant tout didactiques, tout ce qui suit est traité dans le plan, via-à-vis de la conique particulière qu'est le cercle unité. Cependant, tout ce que nous avons fait s'étend d'une part à l'espace et d'autre part à la polarité vis-à-vis de coniques/quadriques.

Nous avons déjà défini plusieurs transformées points-courbes, à savoir la $T.H.$ et les $T.C._c$, basées sur une association entre un point et une sinusoïde (respectivement un cercle). Dans ce chapitre, nous allons étudier la Transformée Polaire (T.P.) qui associe à un point (dit pôle) une droite (dite polaire associée au pôle) de manière bijective.

Nous verrons dans une première partie que la définition de la $T.P.$ peut être étendue à une courbe Γ (pourvu qu'elle soit suffisamment "lisse") en utilisant l'enveloppe de l'ensemble des droites polaires des points de Γ. Cette extension aux courbes a une propriété remarquable : l'image d'une conique est une conique.

Dans un deuxième temps, nous verrons que l'inversion permet d'établir un lien entre les transformées en cercles vues précédemment et la Transformée Polaire que nous allons introduire ci-dessous, lien qui sera également mis en évidence dans le cadre de l'espace Ω_2^p.

La mesure de "l'erreur d'alignement" entre un nuage de points et une droite sera le sujet de la dernière partie. Les pôles des droites présentant une erreur donnée par rapport aux points du nuage forment une conique, propriété que n'ont pas les autres transformations A.P.I.C.

4.2 Image d'une courbe par $T.P._k$

4.2.1 Cas général

Définition 9 *Soit k un réel positif fixé. La transformée polaire (notée $T.P._k$) associe au point $M(a,b)$ du plan (le pôle), la droite $TP_k(M)$ d'équation $ax+by=k$ (la polaire) et réciproquement.*

$$M(a,b) \leftrightarrow ax+by=k$$

□

Dans toute la suite, nous prendrons $k=1$.

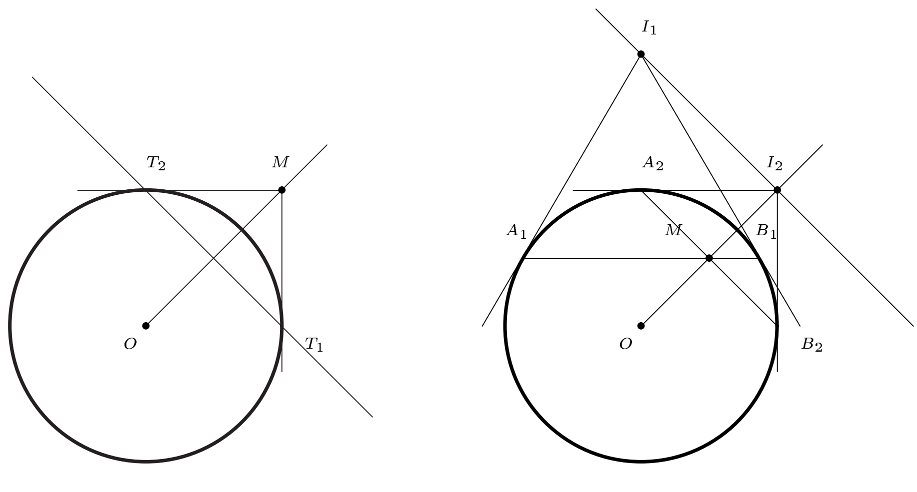
Notons $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, la matrice associée à la conique qu'est le cercle unité.

Donnons une construction géométrique de la polaire connaissant le pôle (Fig 4.1).

- Si le point M est à *l'extérieur* du cercle unité, sa polaire est la droite joignant les points de contact des tangentes au cercle unité C_1 menées par M.
- Si M est à *l'intérieur* du cercle unité, la construction est en deux temps. On trace d'abord deux droites passant par M (on exclut les diamètres) ; elles coupent le cercle C_1 aux points A_1, A_2, B_1, B_2. Les tangentes au cercle aux points (A_1, B_1) (resp. (A_2, B_2)) s'intersectent au point I_1 (resp. I_2). La droite $(I_1 I_2)$ est la polaire associée à M.
- Si M est *sur* le cercle unité, la polaire associée est la tangente en M.

Plus généralement, il est important de noter que $X_o(x_o, y_o, 1)$ est sur la polaire de $X_1(x_1, y_1, 1)$ si et seulement si $x_0 x_1 + y_0 y_1 = 1$, c'est-à-dire si et seulement si :

$$X_0^T S X_1 = 0 \tag{4.1}$$



(a) (b)

FIG. 4.1 – Construction géométrique d'une droite polaire dans les deux cas (a) M extérieur au cercle (b) M intérieur au cercle.

Nous appellerons transformée polaire $T.P.(\Gamma)$ d'une courbe paramétrée $\Gamma(\lambda)$ l'enveloppe (si elle existe) de l'ensemble des droites obtenues par transformée polaire des points de $\Gamma(\lambda)$. Par conséquent, ces droites sont tangentes à la courbe $T.P.(\Gamma)$.

Remarque : Si on se place dans l'espace des points de contacts, la Transformée Polaire est simplement une transformation point à point.

4.2.2 Cas d'une conique

Nous allons nous intéresser au cas particulier où Γ est la conique définie par la matrice symétrique A (de dimensions 3x3 en coordonnées projectives) : un point $X(x, y, 1)$ appartient à Γ si et seulement si il vérifie $X^T AX = 0$. Rappelons également que la tangente en $X_0(x_0, y_0, 1)$ à cette conique a pour équation

$$X^T AX_0 = 0 \tag{4.2}$$

Propriété 16 *La Transformée Polaire de la conique C_A associée à la matrice symétrique A est la conique $T.P.(C_A) = C_B$ associée à la matrice $B = SA^{-1}S$.* □

Preuve Soit $X_0(x_0, y_0, 1)$ un point de C_A :

$$X_0^T AX_0 = 0 \tag{4.3}$$

La matrice A étant symétrique ($A^T = A$), on peut écrire 4.3 sous la forme équivalente suivante (si $A^{-1} existe$) :

$$X_0^T A^T A^{-1} AX_0 = 0 \tag{4.4}$$

ou encore

$$X_0^T A^T SSA^{-1} SSAX_0 = 0 \tag{4.5}$$

Soit en posant $Y_0 = SAX_0$

$$Y_0^T BY_0 = 0 \tag{4.6}$$

Ainsi le point Y_0 appartient à la conique C_B.

D'autre part, si un point X appartient à la polaire du point X_0, d'après 4.1 :

$$X^T SX_0 = 0 \tag{4.7}$$

$$\tag{4.8}$$

Soit

$$X^T \underbrace{SA^{-1}S}_{B} \underbrace{SAX_0}_{Y_0} = 0 \tag{4.9}$$

ou encore

$$X^T BY_0 = 0 \tag{4.10}$$

D'après 4.2, le point X appartient donc à la tangente à C_B en Y_0.

Nous avons prouvé de la sorte que chaque droite polaire associée à un point X_0 de la conique C_A est tangente à la conique C_B au point $Y_0 = SAX_0$; ainsi $T.P.(C_A) = C_B$.

□

4.2.3 Cas de l'ellipse

Sur les figures 4.3, 4.4 et 4.5 sont représentées les $T.P.$ d'une ellipse $\mathcal{E}$ avec différentes positions positions relatives par rapport à l'origine.

Propriété 17 *La T.P. d'une ellipse $\mathcal{E}$ est :*
- *une hyperbole si $\mathcal{E}$ ne contient pas l'origine.*
- *une parabole si $\mathcal{E}$ passe par l'origine.*
- *une ellipse si $\mathcal{E}$ contient l'origine.*

□

Preuve [47] donne une démonstration de cette propriété. Nous en proposons une autre dans un cas particulier qui nous permettra de rendre plus concrets les calculs précédents.

Si l'ellipse $\mathcal{E}$ a son centre en $(a, 0)$ avec $a > 0$ (Fig. 4.2) et pour équation :

$$\alpha^2(x-a)^2 + \beta^2 y^2 - 1 = 0 \tag{4.11}$$

Les points d'intersection de $\mathcal{E}$ avec l'axe Ox ont pour abscisses $a - \frac{1}{\alpha}$ et $1 - \frac{1}{\alpha}$.
On récrit 4.11 sous la forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 & -a\alpha^2 \\ 0 & \beta^2 & 0 \\ -a\alpha^2 & 0 & (\alpha^2 a^2 - 1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \tag{4.12}$$

La conique obtenue par $T.P.$ de $\mathcal{E}$ sera associée à la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha^2} - a^2 & 0 & a \\ 0 & \frac{1}{\beta^2} & 0 \\ a & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 0 \tag{4.13}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha^2} - a^2 & 0 & -a \\ 0 & \frac{1}{\beta^2} & 0 \\ -a & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ B^T & C \end{pmatrix} \tag{4.14}$$

Le type de cette conique est déterminé par le signe du déterminant de la matrice A, i.e. le signe de $\frac{1}{\alpha^2} - a^2$. Les différents cas possibles sont les suivants :

1. $\frac{1}{\alpha} < a$ (l'origine est à l'extérieur de $\mathcal{E}$), $det(A)$ est négatif et $T.P.(\mathcal{E})$ est une hyperbole.
2. $\frac{1}{\alpha} = a$ (l'origine est sur $\mathcal{E}$), $det(A)$ est nul et $T.P.(\mathcal{E})$ est une parabole.
3. $\frac{1}{\alpha} > a$ (l'origine est à l'intérieur de $\mathcal{E}$), $det(A)$ est positif et $T.P.(\mathcal{E})$ est une ellipse.

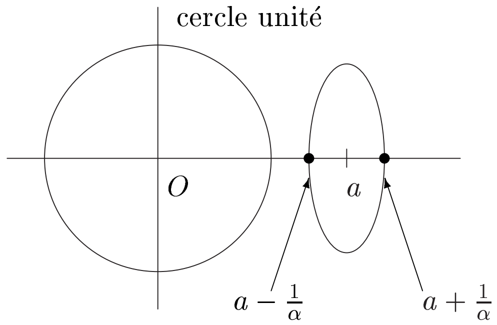


FIG. 4.2 – Ellipse centrée sur l'axe Ox de centre $(a, 0)$, de demi-axes $\frac{1}{\alpha}$ et $\frac{1}{\beta}$.

□

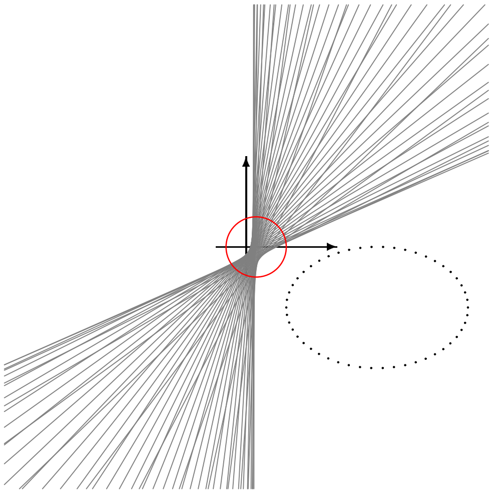


FIG. 4.3 – la *T.P.* d'une ellipse ne contenant pas l'origine est une hyperbole.

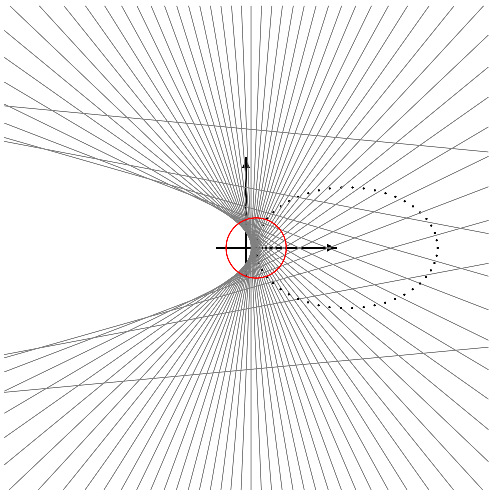


FIG. 4.4 – la *T.P.* d'une ellipse passant par l'origine est une parabole.

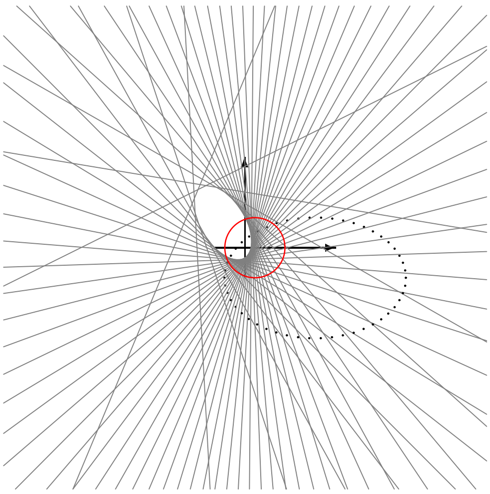


Fig. 4.5 – la *T.P.* d'une ellipse contenant l'origine est une ellipse.

4.3 Liens avec les $T.C._c$ et l'espace Ω_2^p

4.3.1 L'inversion : des cercles aux droites

Propriété 18 *L'image par inversion généralisée I_k^c du cercle d'équation $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ appartient à la droite d'équation $2ax' + 2by' = k$.* □

On trouvera une présentation de l'inversion et de l'inversion généralisée dans l'annexe A.

Remarque : On obtient entièrement la droite si et seulement si $c \leq 0$, les points tels que $a^2 + b^2 = c$ étant "envoyés" à l'infini.

Preuve Soit un point $M(x, y)$ vérifiant :

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0 \tag{4.15}$$

$$1 = \frac{2ax}{x^2 + y^2 + c} + \frac{2bx}{x^2 + y^2 + c} \tag{4.16}$$

Soit $M'(x', y')$ l' image de M par inversion I_1^c, défini par :

$$\begin{cases} x' = \frac{kx}{x^2+y^2+c} \\ y' = \frac{ky}{x^2+y^2+c} \end{cases} \tag{4.17}$$

4.16 peut donc s'écrire sous la forme :

$$\frac{2ax'}{k} + \frac{2by'}{k} = 1 \tag{4.18}$$

$$2ax' + 2by' = k \tag{4.19}$$

□

Propriété 19 *Pour $c \leq 0$, la transformée polaire $T.P._k$ d'un point M du plan est l'inverse I_k^c de la transformée en cercle $T.C_c$ de ce point : $T.P._k(M) = I_k^c(T.C._c(M))$.* □

Preuve Pour un point $M(a, b)$, $T.C._c(M)$ est le cercle d'équation :

$$ax^2 + by^2 - 2ax - 2by + c = 0$$

La propriété précédente indique que l'inversion I_k^c de ce cercle donne la droite d'équation $2ax + 2by = k$, ou de manière équivalente avec $k = 2$, $ax + by = 1$, équation correspondant à $T.P._k(M)$. □

4.3.2 Interprétation de l'inversion dans Ω_2^p

La Transformée Polaire, comme les Transformées en Cercles, peut être définie à partir de la forme bilinéaire de l'espace Ω_2^p. En effet, un point $p(a, b, a^2 + b^2, 1)$ et sa polaire $\delta(a, b, 2, 0)$ ($\delta(a, b, 2k, 0)$ dans le cas général) sont orthogonaux :

$$< p, \delta >= a^2 + b^2 - \frac{1}{2} 2(a^2 + b^2) = 0 \tag{4.20}$$

Dans ce cadre, l'inversion prend la forme d'une simple transformation *linéaire inversant les deux dernières coordonnées*. Le point $p(a, b, a^2+b^2, 1)$ devient $(a, b, 1, a^2+b^2)$ soit de manière équivalente :

$$(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{b}{a^2 + b^2}, \frac{1}{a^2 + b^2}, 1)$$

qui sont les coordonnées du point $\frac{p}{||p||^2}$ inverse de p.

Pour un cercle passant par l'origine $\sigma(a, b, 0, 1)$, le même procédé donne la droite $\delta(a, b, 1, 0)$ qui, d'après la propriété 18, correspond à l'image de σ par inversion.

4.4 Propriétés

4.4.1 Propriété A.P.I.C

Propriété 20 *La T.P. présente la propriété A.P.I.C. : elle échange des alignements de points en intersections de droites.*
(La propriété A.P.I.C. est définie en 3.2.2.2) □

Preuve Grâce à la dualité, la démonstration est immédiate. En effet, soient n points $P_i(x_i, y_i)$ alignés suivant la droite $\delta(a_\delta, b_\delta)$ donc tels que $\forall i, a_\delta x_i + b_\delta y_i = 1$. Par T.P., ces points sont transformés en des droites d'équations

$$\begin{cases} x_1 x + y_1 y = 1 \\ \qquad \vdots \\ x_n x + y_n y = 1 \end{cases} \tag{4.21}$$

Le point $(x = a_\Delta, y = b_\Delta)$, vérifiant l'ensemble de ces équations, est donc à l'intersection de toutes les droites. □

Propriété 21 *Quel que soit le point M du plan, $T.P.(T.P.(M)) = M$* □

Preuve Si M a pour coordonnées (a, b), $T.P.(M)$ est la droite δ_M d'équation :

$$ax + by = 1$$

$T.P.(T.P.(M))$ est donc à prendre dans le sens de la transformée polaire d'une courbe (la droite δ pour $T.P.(M)$). L'ensemble des droites associées aux points de δ formant un faisceau passant par M, l'enveloppe est réduite à ce point. □

Cette propriété de stabilité de la Transformée Polaire se traduit par une capacité à être itérée tout en gardant un sens géométrique. Par exemple dans le cas d'une image où des points sont alignés sur des droites convergentes vers des points de fuite (Fig. 4.6). Les droites, images par $T.P$ de ces points, s'intersectent en un ensemble de points eux-même alignés (Fig. 4.7). La $T.P.$ appliquée une deuxième fois fait apparaître les points de fuite de l'image initiale (Fig. 4.8).

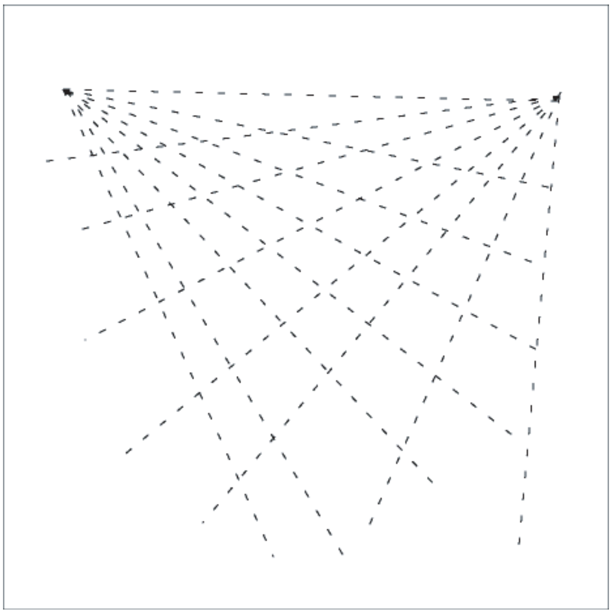


FIG. 4.6 – Points alignés sur deux faisceaux de droites.

4.4.2 Mesure de l'erreur d'alignement

Grâce à ses propriétés géométriques (notamment la transformation d'une conique en conique), la $T.P.$ est davantage adaptée à l'étude de l'erreur d'alignement que les autres transformations $A.P.I.C.$

Appelons l'erreur d'alignement e entre un point $M(x, y)$ et la droite δ d'équation $ax+by = 1$ le carré de la distance entre M et son projeté orthogonal H sur δ, autrement

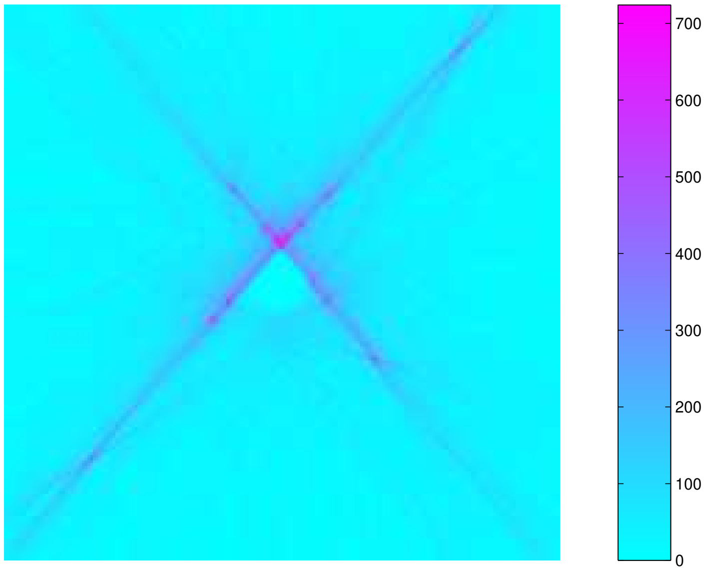


Fig. 4.7 – La *T.P.* met en évidence les droites.

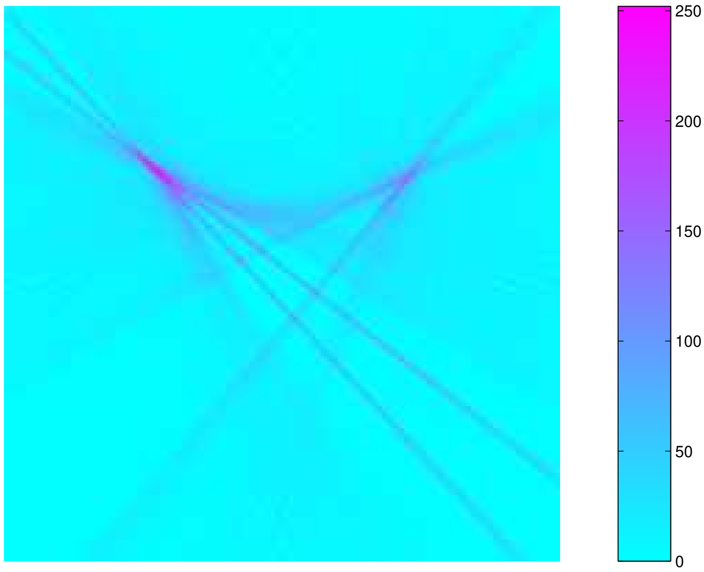


Fig. 4.8 – La *T.P.* de l'image 4.7 met en évidence les points de fuite de 4.8.

dit :

$$e(a, b) = \frac{(ax + by - 1)^2}{a^2 + b^2} \tag{4.22}$$

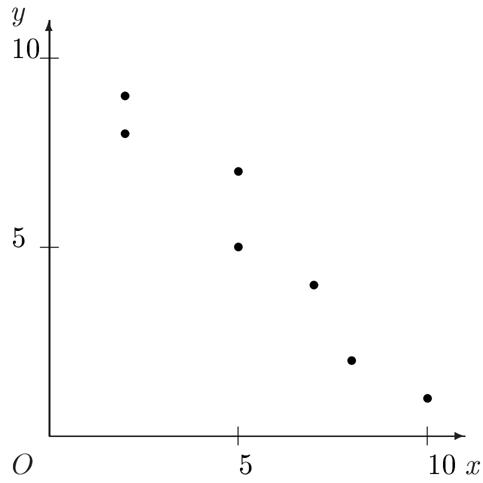


FIG. 4.9 – Ensemble de points approximativement alignés.

$$e(a,b) = \left(\frac{< M, \delta >}{\|\delta\|}\right)^2 \tag{4.23}$$

$$\tag{4.24}$$

Ainsi, pour un ensemble de n points M_i, l'erreur totale devient :

$$e(a,b) = \frac{\sum_{i=1}^{n} (ax_i + by_i - 1)^2}{a^2 + b^2} \tag{4.25}$$

Il existe une droite, dite des moindres carrés [54] pour laquelle e est minimum.

La fonction de deux variables $e(a, b)$ peut être représentée en tant que surface dans $\mathbb{R}^3$. La figure 4.10 en donne un exemple, associé au nuage de points de la figure 4.9. Les courbes de niveau γ_c correspondantes sont données sur la figure 4.11. Les points appartenant à une même courbe γ sont associés à des droites présentant la même erreur d'alignement avec les points M_i.

Propriété 22 *L'ensemble des courbes de niveau γ_c forme un faisceau de coniques.* □

Preuve Récrivons l'équation de la courbe γ_c sous la forme :

$$c\left(a^2 + b^2\right) = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + by_i - 1)^2 \tag{4.26}$$

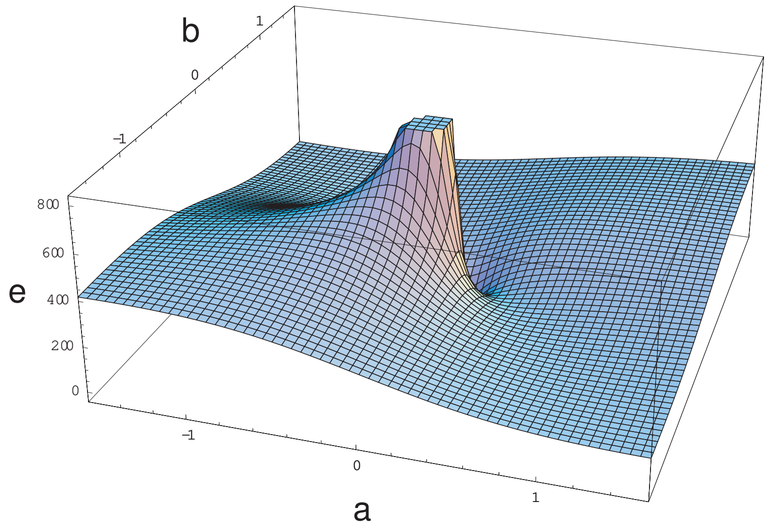


FIG. 4.10 – Erreur d'alignement entre le nuage de points de la figure 4.9 et la droite d'équation $ax + by = 1$, selon les valeurs de a et b.

$$\frac{c}{c+1}\underbrace{(a^2+b^2)}_{\varphi_1} - \frac{1}{c+1}\underbrace{\sum_{i=1}^{n}(ax_i + by_i - 1)^2}_{\varphi_2} = 0 \tag{4.27}$$

Cette équation correspond à un faisceau de coniques contrôlé par le paramètre c, variant de 0 à $+\infty$, avec :

$$\varphi_1(a,b) = a^2 + b^2 \tag{4.28}$$
$$\varphi_2(a,b) = a^2\sum_{i=1}^{n}x_i^2 + b^2\sum_{i=1}^{n}y_i^2 + n - 2a\sum_{i=1}^{n}x_i - 2b\sum_{i=1}^{n}y_i + 2ab\sum_{i=1}^{n}x_iy_i \tag{4.29}$$

□

Le faisceau γ_c ainsi obtenu est guidé par la valeur de c :
- Pour $c < c_m$, l'équation 4.27 n'a pas de trace réelle.
- Pour $c = c_m$, γ_c est réduit au point (a_m, b_m).
- Pour $c > c_m$, le faisceau est formé successivement par des ellipses, paraboles et hyperboles.
- Lorsque c tend vers l'infini, γ_c qui tend vers un point à l'origine, a une forme de plus en plus circulaire (Fig. 4.13).

Quand l'erreur "tolérée" c est faible, γ_c est une ellipse contenant en son intérieur le point (a_m, b_m) suffisamment petite pour que l'origine soit à l'extérieur. L'ensemble des droites associées $T.P.(\gamma_c)$ est contenu, d'après la propriété 17, dans une hyperbole

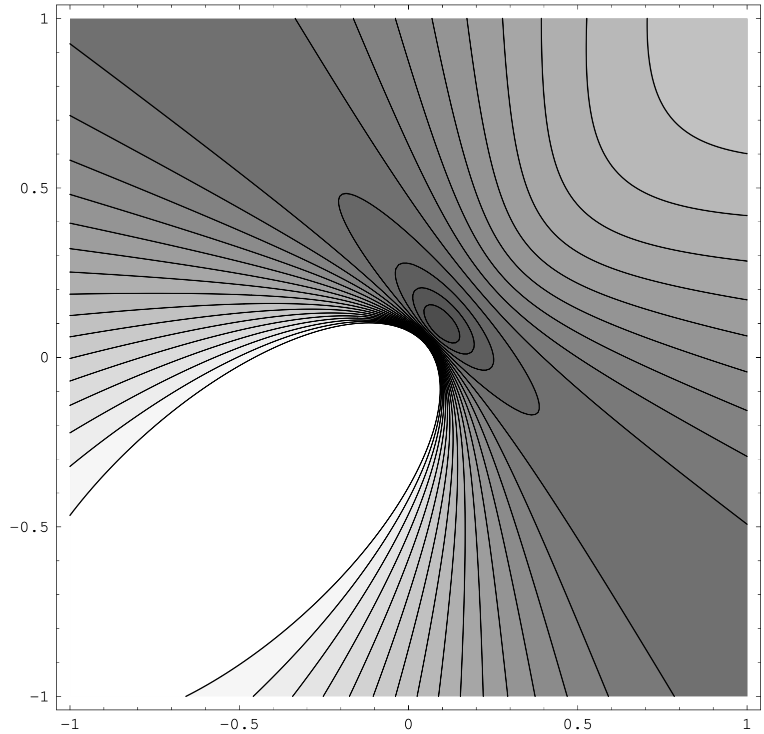


FIG. 4.11 – le faisceau de coniques γ_c (coupes horizontales de la surface de la Fig. 4.10).

contenant la droite des moindres carrés.

Les droites pour lesquelles l'erreur c est suffisamment grande sont soumises à moins de contraintes par rapport au nuage de points. Toutes les directions deviennent possibles et leur enveloppe forme une ellipse autour du nuage de points ; γ_c est alors une ellipse contenant l'origine.

Propriété 23 *Pour tout ensemble de n points M_i (non tous alignés) dans $\mathbb{R}^2$, il existe deux points (p_1 et p_2) définissant deux faisceaux de droites (F_1 et F_2) pour lesquels l'erreur e par rapport aux points M_i est constante.*

$$\forall \delta \in (F_1 \bigcup F_2),\ e(\delta) = cte = c_c$$

□

Preuve Soit un ensemble formé de n points $M_i(x_i, y_i)$ (les valeurs centrées sont notées $(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i)$), m_x et m_y désignent respectivement les moyennes en x et y).
Les courbes de niveaux γ_c ont l'équation matricielle suivante (Fig. 4.27) :

$$X^T A X = 0 \tag{4.30}$$

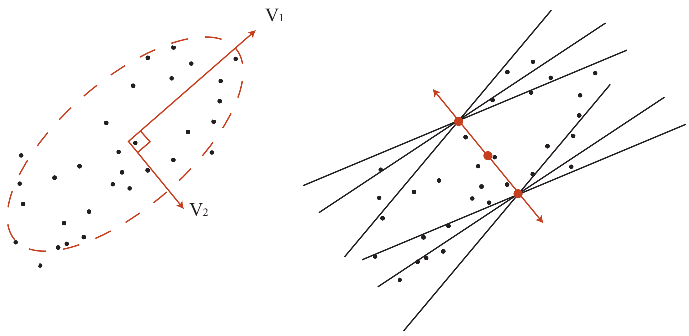


Fig. 4.12 – (a) Axes et ellipse d'inerties d'un nuage de points. (b) Faisceaux de droites d'erreur constante.

avec $X^T = (a, b, 1)$ et

$$A = \begin{pmatrix} c - \sum x_i^2 & -\sum x_i y_i & \sum x_i \\ -\sum x_i y_i & c - \sum y_i^2 & \sum y_i \\ \sum x_i & \sum y_i & -n \end{pmatrix}$$

Notons

$$D = \begin{pmatrix} \sum \tilde{x}_i^2 & \sum \tilde{x}_i \tilde{y}_i \\ \sum \tilde{x}_i \tilde{y}_i & \sum \tilde{y}_i^2 \end{pmatrix} \tag{4.31}$$

la matrice de covariance du nuage. Elle est symétrique définie positive donc diagonalisable, et ses vecteurs propres V_1 et V_2, associés aux valeurs propres λ_1 et λ_2 ($\lambda_1 > \lambda_2 > 0$), forment une base orthogonale. Le vecteur V_1 correspond à la direction pour laquelle les points M_i présentent la plus grande variance. On a :

$$D = B^T \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} B \tag{4.32}$$

B étant la matrice orthogonale de changement de base :

$$B = \begin{pmatrix} V_{1x} & V_{2x} \\ V_{1y} & V_{2y} \end{pmatrix} \tag{4.33}$$

On montre sans difficulté que :

$$A = \begin{pmatrix} B^T & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c - \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & c - \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - n \begin{pmatrix} m_x \\ m_y \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_x & m_y & -1 \end{pmatrix}$$

Prenons le cas particulier $c = \lambda_1$; on a alors :

$$A = (\lambda_1 - \lambda_2) \begin{pmatrix} V_2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_2^T & 0 \end{pmatrix} - n \begin{pmatrix} m_x \\ m_y \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_x & m_y & -1 \end{pmatrix} \quad (4.34)$$

On dispose donc d'une écriture simplifiée de A et l'équation $X^T AX = 0$ avec $X(a, b, 1)$ devient :

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(av_{2y} + bv_{2y})^2 = n(m_x a + m_y b - 1)^2$$

qui représente l'union de deux droites, puisque $(\lambda_1 - \lambda_2) > 0$, images par *T.P.* des points $(m_x \pm \sqrt{\frac{\lambda_1-\lambda_2}{n}} V_{2x}, m_y \pm \sqrt{\frac{\lambda_1-\lambda_2}{n}} V_{2y})$ (Fig. 4.13).

L'ensemble des droites présentant une erreur $c = \lambda_1$ correspond donc au double faisceau de droites passant par ces deux points. □

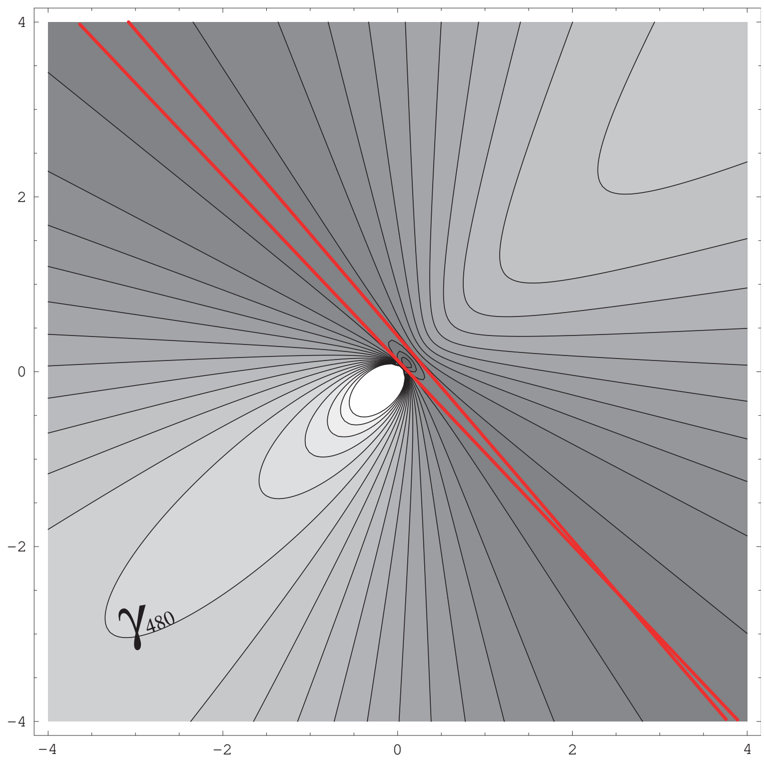


Fig. 4.13 – Droites correspondant aux faisceaux F_1 et F_2.

Remarque : Le rapport $e(a,b) = \frac{\sum_{i=1}^{n} (ax_i + by_i - 1)^2}{a^2+b^2}$ *peut aussi être vu comme l'inverse* *d'un coefficient de Rayleigh [15].*

En effet, en posant

$$E = \begin{pmatrix} \sum x_i^2 & \sum x_i y_i & -\sum x_i \\ \sum x_i y_i & \sum y_i^2 & -\sum y_i \\ -\sum x_i & -\sum y_i & n \end{pmatrix}$$

on peut écrire :

$$\frac{1}{e(a,b)} = \frac{X^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X}{X^T E X} = \frac{X^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X}{X^T C^T C X}$$

$C^T C$ étant la décomposition de Cholesky de la matrice E. On effectue alors le changement de variable $Y = CX$, pour obtenir finalement la forme d'un quotient de Rayleigh :

$$\frac{1}{e(a,b)} = \frac{Y^T G Y}{Y^T Y}$$

avec

$$G = C^{-T} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} C^{-1}$$

dont les valeurs extrêmales sont les valeurs propres de la matrice G.

4.5 Conclusion

D'une certaine manière, la Transformée Polaire "concentre" les propriétés de la $T.H.$ et des $T.C_c$ qui sont essentiellement rattachées à la géométrie différentielle. De plus, et c'est en cela qu'elle est plus intéressante que les transformées précédentes, elle permet de tirer un grand profit de la (véritable) dualité grâce aux outils de l'algèbre linéaire, permettant notamment de visualiser les erreurs d'alignement sous forme de faisceaux de coniques.

Chapitre 5

Mesure et géométrie intégrale

La Transformée de Hough ($T.H.$) d'une forme convexe est définie comme la $T.H.$ de l'ensemble des droites qui l'intersectent. Dans le plan de Hough (θ, p), l'aire de la surface formée par l'ensemble des points ainsi obtenus est égale au périmètre de cette forme (propriété $P.A.$). Cette propriété peut être étendue aux autres transformations $A.P.I.C$ à condition de pondérer la mesure de l'aire. On retrouve ainsi une mesure *invariante par déplacement* connue dans le domaine de la géométrie intégrale.

$$\int \int_{T.P.(\Delta\mathcal{F})} \frac{1}{p^3} d\mu_1 d\mu_2 = \int \int_{\mathcal{F}\times\mathcal{F}} \frac{1}{\left\| \overrightarrow{D_1 D_2} \right\|} \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 ds_1 ds_2$$

5.1 Introduction

La Transformée de Hough est généralement utilisée pour son aptitude à détecter des alignements (propriété A.P.I.C.). Elle possède une autre propriété moins connue. Il s'agit de la relation existant entre le périmètre d'une forme convexe et l'aire de sa "transformée". Cette relation, que nous appellerons Périmètre-Aire (*P.A.*), permet notamment d'estimer efficacement un périmètre, quantité difficile à estimer dans un espace discret, et de définir une mesure d'ensemble de droites invariante par déplacement. Il sera donc nécessaire avant tout de préciser la définition de la *T.H.* d'une forme.

Nous étendons cette définition à d'autres transformations qui présentent la propriété A.P.I.C. (T.P.,T.C,..) et nous démontrons qu'elles possèdent également la propriété *P.A.* Cependant, la surface obtenue, par exemple en considérant les droites coupant deux segments, dépend de la position de ces derniers par rapport à l'origine. Il est donc nécessaire de pondérer la surface intégrée pour obtenir des mesures invariantes par déplacement, notion essentielle en géométrie intégrale.

Enfin, nous évoquerons le cas des formes non convexes.

5.2 Propriété *P.A.* de la *T.H.*

5.2.1 T.H. d'une forme

Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, la T.H. associe au point de coordonnées (θ_0, p_0) la droite d'équation $x\cos(\theta_0) + y\sin(\theta_0) = p_0$ avec $[\theta_0, p_0] \in [0, \pi[\times\mathbb{R}$. Le faisceau de droites passant par ce point est associé à la courbe sinusoïdale d'équation $p = p_o \cos(\theta - \theta_o)$.

De façon plus générale, il est possible d'associer à une forme convexe $\mathcal{F}$ l'ensemble des droites $\Delta_{\mathcal{F}}$ coupant $\mathcal{F}$, puis de calculer les points $T.H.(\Delta_{\mathcal{F}})$ associés à chacune des droites. On définit ainsi la transformée de Hough d'une forme.

Dans le cas élémentaire où $\mathcal{F}$ est un segment $[A, B]$, l'ensemble $T.H.(\Delta_{\mathcal{F}})$ est l'espace dans le plan de Hough compris entre les deux sinusoïdes associées aux points A et B (Fig. 5.1).

5.2.2 Mesure d'un ensemble de droites

5.2.2.1 Définition

On dispose de plusieurs transformées permettant de représenter les droites par des points dans un espace de paramètres. L'aire, mesure classique ayant des caractéristiques pratiques de grande stabilité, peut permettre de mesurer également les ensembles de

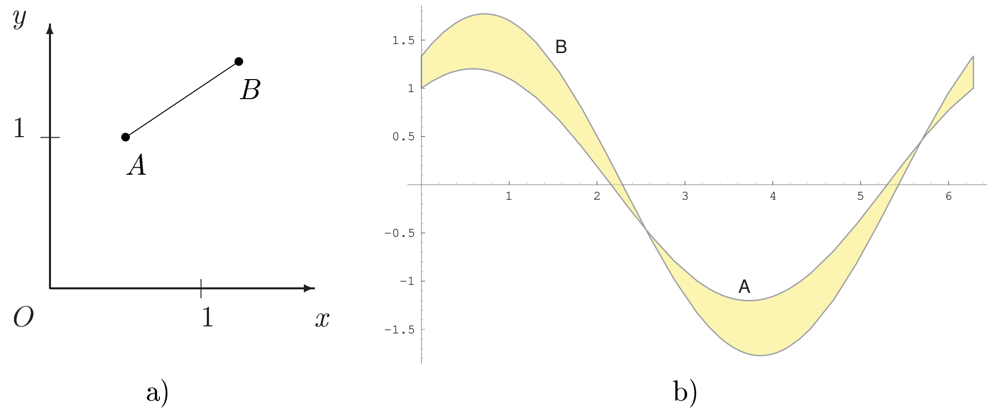


FIG. 5.1 – Chacune des droites coupant le segment $[A, B]$ (ou encore "séparant A de B") est représentée par un point de la zone colorée de la figure de droite.

droites.

Définition 10 *Soit Δ un ensemble de droites du plan, et $T.H.(\Delta)$ l'ensemble des points associé dans l'espace de Hough. L'aire de $T.H.(\Delta)$ est une mesure de l'ensemble de droites Δ : $\mu(\Delta) = Aire(T.H.(\Delta))$.* □

μ est une mesure car elle vérifie les deux propriétés suivantes :
- $\forall \Delta$, $\mu(\Delta) \geq 0$;
- $\forall \Delta_i$ tel que $i \neq j \Rightarrow \Delta_i \bigcap \Delta_j$ de mesure nulle, $\mu(\bigcup \Delta_i) = \sum \mu(\Delta_i)$.

Remarque : Un faisceau de droites est de mesure nulle. En effet, il est associé par T.H. à une courbe sinusoïdale d'aire nulle. Nous supposons implicitement que toutes les parties considérées sont mesurables.

5.2.2.2 Propriétés de μ

Propriété 24 *Si $\mathcal{F}$ est une forme convexe, la mesure $\mu(\Delta_{\mathcal{F}})$ est égale au périmètre de $\mathcal{F}$. Nous parlerons de propriété P.A. (Périmètre-Aire).* □

La figure 5.2 illustre cette propriété pour un triangle. L'aire de la zone colorée dans le plan de Hough est égale au périmètre du triangle ABC.

Preuve Soit un polygone convexe plan $\mathcal{P}$ formé de n segments de longueur l_i et d'orientation θ_i.
Pour un angle θ donné, on s'intéresse à l'ensemble des droites de direction $\theta + \frac{\pi}{2}$ et qui coupent $\mathcal{P}$ (Fig. 5.2). On note ρ_{max} et ρ_{min} les valeurs maximale et minimale du paramètre ρ pour ces droites. La projection de tous les côtés du polygone sur l'axe de

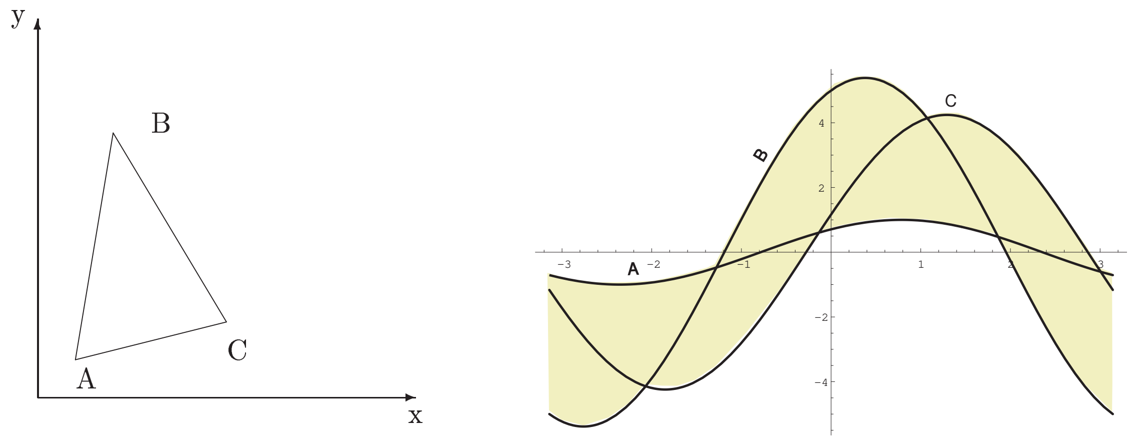


FIG. 5.2 – Illustration de la propriété $P.A.$ pour un triangle ABC : le périmètre d'une forme convexe est égal à l'aire de sa transformée de Hough.

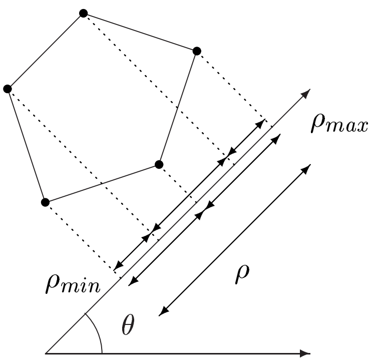


FIG. 5.3 – L'ensemble des droites d'angle polaire $\theta + \frac{\pi}{2}$ coupant un polygone est matérialisé par les points du segment $[\rho_{min}, \rho_{max}]$.

direction θ est égale à deux fois la distance $|\rho_{\max} - \rho_{\min}|$, car $\mathcal{F}$ est convexe (Fig. 5.3). Pour obtenir la valeur de $\mu(P)$, on somme cette distance pour tous les angles :

$$2\,|\rho_{\max} - \rho_{\min}| = \sum_{i=1}^{n} l_i\,|\cos(\theta - \theta_i)| \tag{5.1}$$

$$2\int_0^{\pi} |\rho_{\max} - \rho_{\min}|\,d\theta = \int_0^{\pi} \sum_{i=1}^{n} l_i\,|\cos(\theta - \theta_i)|d\theta \tag{5.2}$$

$$2\mu(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} l_i \int_0^{\pi} |\cos(\theta - \theta_i)|\,d\theta \tag{5.3}$$

$$2\mu(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} 2l_i d\theta \tag{5.4}$$

$$\mu(\mathcal{P}) = longueur(\partial\mathcal{P}) \tag{5.5}$$

Par continuité au sens de la distance de Hausdorff, la relation est valable pour toute forme convexe. □

Remarques :
- *Si la forme est un segment, l'aire est égale à deux fois la longueur du segment.*
- *Si la forme n'est pas convexe, on obtient une correspondance avec la longueur de l'enveloppe convexe de la forme.*

Propriété 25 $\mu(\Delta_{\mathcal{F}})$ *est invariant par déplacement de* $\mathcal{F}$. □

En effet, la démonstration précédente est indépendante de l'origine. La forme $\mathcal{F}$ peut subir un déplacement, les longueurs de ses projections resteront identiques.

5.2.3 Cas de deux segments

A titre heuristique, nous allons établir, avec nos "outils", un cas particulier du théorème de Crofton dont l'énoncé, "très XIX^{eme} siècle" [2], est le suivant :

Soient deux domaines convexes D_1 *et* D_2 *du plan. L'unique mesure invariante par déplacement de l'ensemble des droites séparant* D_1 *et* D_2 *est la longueur de la courroie croisée la plus courte entourant* D_1 *et* D_2 *diminuée du périmètre de* D_1 *et* D_2 *(Fig. 5.4).*

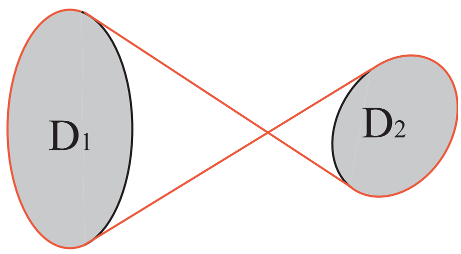


FIG. 5.4 – Deux formes convexes et "la courroie croisée" de Crofton.

Notons $\Delta_{[A,B],[C,D]}$ l'ensemble des droites qui coupent à la fois deux segments disjoints : $[A,B]$ et $[C,D]$ (Fig. 5.5). Cet ensemble est représenté dans le plan de Hough par deux compacts dont les frontières sont des morceaux d'arcs des quatre sinusoïdes associées aux points A, B, C et D (Fig. 5.2).

Remarque : $\Delta_{[A,B],[C,D]}$ *peut aussi s'exprimer de manière alternative en tant qu'ensemble des droites qui séparent les points* $\{A, D\}$ *d'une part et* $\{B, C\}$ *de l'autre (ou* $\{A, C\}$ *et* $\{B, D\}$ *suivant l'orientation du segment* $[CD]$*).*

Théorème 1 *Soit d_{AD}, d_{AC}, d_{BC} et d_{BD} les distances entre les points (A, B, C, D) ; on a la relation suivante :*

$$\mu(\Delta_{[A,B],[C,D]}) = d_{AD} + d_{BC} - d_{AC} - d_{BD} \tag{5.6}$$

□

C'est un résultat classique en géométrie intégrale, qui peut être interprété également de la façon suivante, selon les termes mêmes de Crofton : la mesure des droites est égale à la longueur d'une courroie passant par les points $ABCD$ moins la longueur de la même courroie croisée (Fig. 5.5).

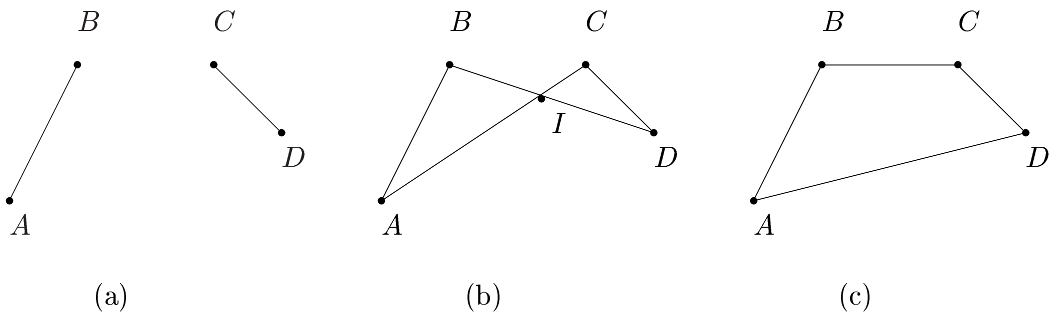


FIG. 5.5 – (a) Deux segments $[AB]$ et $[CD]$ (b) "courroie croisée" (d_{AC}+d_{BD}) (c) "courroie simple" (d_{AD}+d_{BC}).

Preuve Appelons I le point d'intersection des droites (AD) et (BC). Notons Δ_{ABI} et Δ_{CID} l'ensemble des droites qui coupent respectivement les triangles ABI et CID.

Soit D une droite qui appartient à Δ_{ABI} et Δ_{CID}. Elle coupe deux côtés de chaque triangle. Or, les points A, I, C d'une part et B, I, D d'autre part, sont alignés. Il est donc impossible de couper à la fois les segments $[BI]$ et $[DI]$, ou $[CI]$ et $[IA]$. D coupe donc nécessairement $[AB]$ et $[CD]$.

$$\Delta_{ABI} \bigcap \Delta_{CID} \subset \Delta_{[A,B][C,D]} \tag{5.7}$$

Or l'inclusion inverse :

$$\Delta_{[A,B],[C,D]} \subset \Delta_{ABI} \bigcap \Delta_{CID} \tag{5.8}$$

est évidente. On a donc finalement :

$$\Delta_{[A,B],[C,D]} = \Delta_{ABI} \tag{5.9}$$

D'autre part, toute droite Δ_{ABCD} coupant le polygone $ABCD$ coupe le triangle ABI ou le triangle CID, et vice versa. Soit, en termes ensemblistes :

$$\Delta_{ABCD} = \Delta_{ABI} \bigcup \Delta_{CID}$$

En appliquant l'additivité de la mesure,

$$\mu(\Delta_{ABI} \bigcup \Delta_{CID}) = \mu(\Delta_{CID}) + \mu(\Delta_{ABI}) - \mu(\Delta_{ABI} \bigcap \Delta_{CID})$$
$$\mu(\Delta_{[A,B],[C,D]}) = d_{ID} + d_{CI} + d_{DC} + d_{AB} + d_{BI} + d_{IA} - \mu(\Delta_{ABCD})$$
$$\mu(\Delta_{[A,B],[C,D]}) = d_{ID} + d_{CI} + d_{DC} + d_{AB} + d_{BI} + d_{IA} - d_{AB} - d_{BC} - d_{CD} - d_{DA}$$
$$\mu(\Delta_{[A,B],[C,D]}) = d_{ID} + d_{IA} + d_{CI} + d_{BI} - d_{BC} - d_{DA}$$
$$\mu(\Delta_{[A,B],[C,D]}) = d_{AD} + d_{BC} - d_{AC} - d_{BD}$$

□

Quel est le rapport avec Crofton ? Dans notre cas, les formes sont réduites à deux segments $D_1 \equiv [BC]$ et $D_2 \equiv [AD]$. Les droites qui coupent les segments $[AB]$ et $[CD]$ sont celles qui séparent D_1 et D_2. La longueur de la "courroie croisée" est alors $d_{AC} + d_{CB} + d_{BD} + d_{DA}$ et les périmètres des formes : $2d_{AC}$ et $2d_{BD}$.
Ainsi on retrouve la même mesure :

$$\mu = d_{AD} + d_{BC} + d_{BD} + d_{DA} - 2d_{AC} - 2d_{BD} \tag{5.10}$$
$$\mu = d_{AD} + d_{BC} - d_{BD} - d_{DA} \tag{5.11}$$

5.3 Transformée Polaire

5.3.1 Transformée Polaire d'une forme

La Transformée Polaire permet d'associer, à une droite d'équation $ax + by = 1$, le pôle de coordonnées (a, b). De la même façon que pour la $T.H.$, il est possible de définir la $T.P.$ d'une forme convexe.

Définition 11 *La transformée polaire d'une forme convexe $\mathcal{F}$ est l'ensemble $T.P.(\Delta_{\mathcal{F}})$ des pôles associés à chacune des droites coupant $\mathcal{F}$.*
□

Cependant, l'aire de $T.P.(\Delta_{\mathcal{F}})$ ne présente pas, a priori, les propriétés intéressantes de type $P.A.$ (périmètre aire) que nous avons détaillées pour la $T.H.$ Ceci pour deux raisons :
- Cette aire peut être infinie si des droites coupant la forme passent par l'origine.
- Cette aire est invariante par rotation mais pas par translation (Fig. 5.6).

Nous allons voir qu'à condition de "compenser" la mesure ordinaire du plan (mesure de Lebesgue) par une fonction de pondération en $\frac{1}{p^3}$, on obtient un invariant pour le groupe des déplacement.

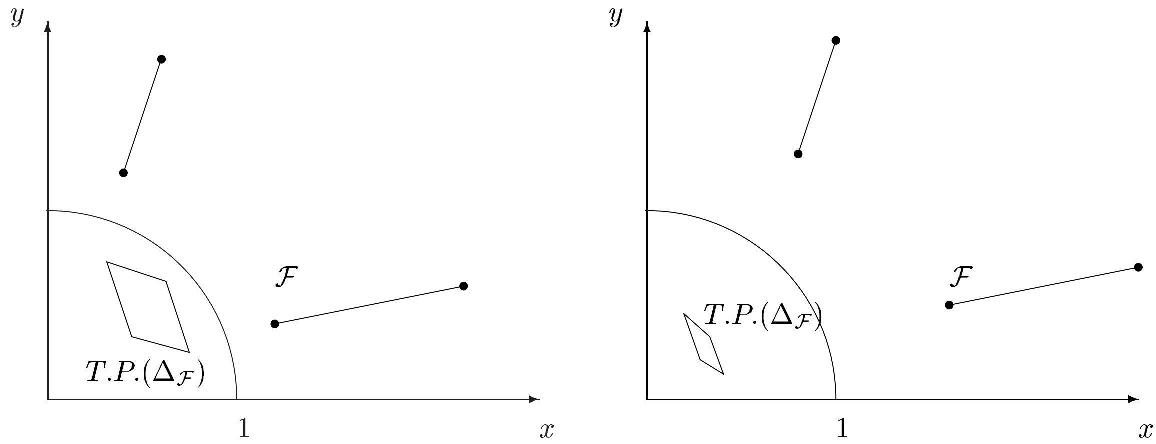


FIG. 5.6 – Soit $\mathcal{F}$ la figure constituée par l'union de deux segments. La transformée Polaire notée $TP(\mathcal{F})$ est l'ensemble des pôles des droites qui coupent $\mathcal{F}$. C'est un quadrilatère qui diminue en taille lorsqu'on éloigne $\mathcal{F}$ de l'origine.

5.3.2 Cas particulier de deux segments infinitésimaux

5.3.2.1 Aire de la transformée associée à deux segments infinitésimaux

Nous arrivons ici à l'un des résultats principaux de ce mémoire. Reprenons le cas simple où l'ensemble des droites $\Delta_{[D1,D1'][D2,D2']}$ considérées coupent deux segments $[D_1, D_1']$ et $[D_2, D_2']$. On note V_1 et V_2 des vecteurs unitaires associés à ces segments (Fig 5.7).

Si aucune droite de $\Delta_{[D1,D1'][D2,D2']}$ ne passe par l'origine, il est aisé de montrer que l'ensemble des pôles associés forme un quadrilatère dont les sommets sont définis par les droites (D_1, D_2), (D_1, D_2'), (D_1', D_2), (D_1', D_2'). Il est évident que l'aire de ce quadrilatère dépend de la position des segments par rapport à l'origine (Fig. 5.6) (plus ils s'éloignent de l'origine, plus $T.P.(\Delta_{[D1,D1'][D2,D2']})$ est petit et proche de l'origine).

Théorème 2 *Avec les notations précédentes, et en posant $V_1(a_1, b_1)$, $V_2(a_2, b_2)$, $D_1(x_1, y_1)$ et $D_2(x_2, y_2)$. Si $[D_1, D_1']$ et $[D_2, D_2']$ sont deux segments de longueurs infinitésimales ds_1 et ds_2, alors l'aire dA de $T.P.(\Delta_{[D1,D1'][D2,D2']})$ est donnée par la relation :*

$$dA = \ ds_1\, ds_2 \frac{\det \begin{bmatrix} a_1 & x_2 - x_1 \\ b_1 & y_2 - y_1 \end{bmatrix} \det \begin{bmatrix} a_2 & x_1 - x_2 \\ b_2 & y_1 - y_2 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix}^3} \tag{5.12}$$

□

ou encore sous la forme équivalente suivante :

$$dA = ds_1\, ds_2\, \frac{\det\left[\overrightarrow{D_1D_2}, \overrightarrow{V_1}\right] \det\left[\overrightarrow{D_1D_2}, \overrightarrow{V_2}\right]}{\det\left[\overrightarrow{OD_1}, \overrightarrow{OD_2}\right]^3} \tag{5.13}$$

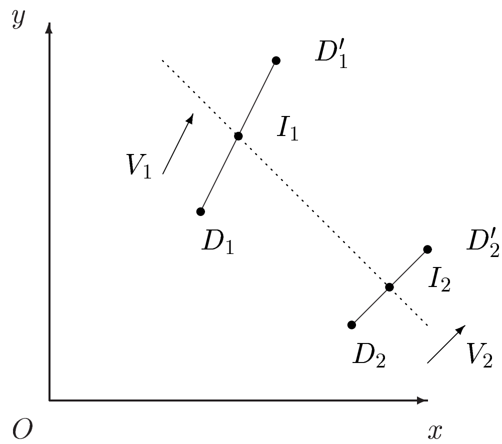


FIG. 5.7 – Segments $[D_1, D'_1]$ et $[D_2, D'_2]$ coupés par une droite en les points $I_1 = D_1 + \mu_1 V_1$ et $I_2 = D_2 + \mu_2 V_2$.

Preuve Soit une droite qui coupe le segment $[D_1, D'_1]$ en $I_1(x_1 + \mu_1 a_1, y_1 + \mu_1 b_1)$ avec $\mu_1 \in [0,1]$, et le segment $[D_2, D'_2]$ en $I_2(x_2 + \mu_2 a_2, y_2 + \mu_2 b_2)$ avec $\mu_2 \in [0,1]$.

Elle appartient donc à l'ensemble $\Delta_{[D_1,D'_1][D_2,D'_2]}$ car elle coupe les deux segments. Son équation est donnée par la condition classique d'alignement :

$$\det \begin{bmatrix} x_1 + \mu_1 a_1 & x_2 + \mu_2 a_2 & x \\ y_1 + \mu_1 b_1 & y_2 + \mu_2 b_2 & y \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 0 \tag{5.14}$$

En posant $\delta = \det \begin{bmatrix} x_1 + \mu_1 a_1 & x_2 + \mu_2 a_2 \\ y_1 + \mu_1 b_1 & y_2 + \mu_2 b_2 \end{bmatrix}$, ou encore :

$$\delta = x_1 y_2 - x_2 y_1 + \mu_1 (a_1 y_2 - a_2 y_1) + \mu_2 (x_1 b_2 - a_2 y_1) + \mu_1 \mu_2 (a_1 b_2 - a_2 b_1) \tag{5.15}$$

5.14 devient :

$$\underbrace{\frac{1}{\delta}\left[(y_1 + \mu_1 b_1) - (y_2 + \mu_2 b_2)\right]}_{a} x + \underbrace{\frac{1}{\delta}\left[(x_2 + \mu_2 a_2) - (x_1 + \mu_1 a_1)\right]}_{b} y = 1 \tag{5.16}$$

Le point (a,b) obtenu ainsi à partir de l'équation $ax+by=1$ est le pôle de la droite. Lorsque μ_1 et μ_2 décrivent l'intervalle $[0,1]$, le pôle décrit la surface $T.P.(\Delta_{[D1,D1'][D2,D2']})$. L'aire de cette surface est donnée par le jacobien de la relation ci-dessous qui exprime que (a,b) est obtenue par une transformation projective à partir de μ_1,μ_2.

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & -b_2 & y_1-y_2 \\ -a_1 & a_2 & x_2-x_1 \\ a_1y_2-x_2b_1 & x_1b_2-y_1a_2 & x_1y_2-x_2y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5.17}$$

Remarque : les termes du second ordre $\mu_1\mu_2$ ont été ignorés dans le développement de δ car nous allons nous placer d'un point de vue infinitésimal dans la suite.

Cette relation entre (a,b) et (μ_1,μ_2) peut être dérivée (Voir Annexe C). Ainsi, le jacobien

$$J = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial a}{\partial \mu_1} & \frac{\partial b}{\partial \mu_1} \\ \frac{\partial a}{\partial \mu_2} & \frac{\partial b}{\partial \mu_2} \end{bmatrix} \tag{5.18}$$

de cette transformation projective devient

$$J(\mu_1,\mu_2) = \frac{\det \begin{bmatrix} b_1 & -b_2 & y_1-y_2 \\ -a_1 & a_2 & x_2-x_1 \\ a_1y_2-x_2b_1 & x_1b_2-y_1a_2 & x_1y_2-x_2y_1 \end{bmatrix}}{\left((a_1y_2-x_2b_1)\,\mu_1+(x_1b_2-y_1a_2)\,\mu_2+x_1y_2-x_2y_1\right)^3} \tag{5.19}$$

dA est obtenu en prenant la valeur en $(\mu_1,\mu_2)=(0,0)$ de ce jacobien.

$$\begin{aligned} dA &= ds_1\, ds_2\, J(0,0) \\ dA &= ds_1\, ds_2 \frac{\det \begin{bmatrix} b_1 & -b_2 & y_1-y_2 \\ -a_1 & a_2 & x_2-x_1 \\ 0 & x_1b_2-y_1a_2+y_2a_2-b_2x_2 & 0 \end{bmatrix}}{(x_1y_2-x_2y_1)^3} \end{aligned}$$

ce qui donne immédiatement la relation 5.12. □

Remarque :

1. *La transformée polaire est en quelque sorte tangente à la transformée projective.*
2. *Ce résultat n'est pas complètement original. Il est mentionné dans [48] page 32 mais avec une approche très différente.*

5.3.2.2 Fonction de poids

Nous allons écrire la relation 5.13 sous une forme légèrement différente, permettant ainsi de mettre en évidence les termes dépendant de l'origine.

$\det\left[\overrightarrow{OD_1},\overrightarrow{OD_2}\right]$ est égal à deux fois l'aire du triangle OD_1D_2 soit, en notant p la distance de la droite (D_1D_2) à l'origine (Fig. 5.8) :

$$\det\left[\overrightarrow{OD_1},\overrightarrow{OD_2}\right] = p\left\|\overrightarrow{D_1D_2}\right\| \tag{5.20}$$

En posant $\alpha_1 = (\widehat{\overrightarrow{D_1D_2},\overrightarrow{V_1}})$ et $\alpha_2 = (\widehat{\overrightarrow{D_1D_2},\overrightarrow{V_2}})$, on obtient les relations suivantes :

$$\det\left[\overrightarrow{D_1D_2},\overrightarrow{V_1}\right] = \left\|\overrightarrow{D_1D_2}\right\|\sin\alpha_1 \tag{5.21}$$

$$\det\left[\overrightarrow{D_1D_2},\overrightarrow{V_2}\right] = \left\|\overrightarrow{D_1D_2}\right\|\sin\alpha_2 \tag{5.22}$$

Ainsi, l'aire dA de l'ensemble des pôles de la forme infinitésimale est donnée par la relation :

$$dA = \frac{1}{p^3\left\|\overrightarrow{D_1D_2}\right\|}\sin\alpha_1\sin\alpha_2 ds_1 ds_2 \tag{5.23}$$

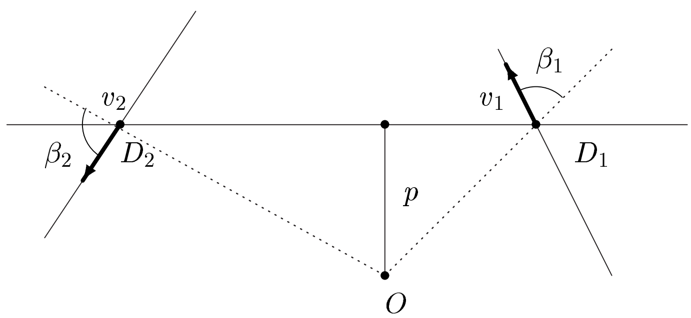


FIG. 5.8 – L'aire du triangle OD_1D_2 est égale à $\frac{1}{2}p\left\|D_1D_2\right\|$.

Tous les termes sont indépendants de l'origine sauf $\frac{1}{p^3}$. L'aire dA varie en fonction de la position des segments dans le plan.

Pour obtenir une valeur qui ne soit plus dépendante de l'origine, la relation 5.23 doit être multipliée par p^3. Or la distance r du pôle à l'origine est égale à l'inverse de la distance p entre l'origine et la droite.

Ainsi l'aire dA est pondérée par la fonction de poids $\varphi(r) = \frac{1}{r^3}$.

$$dA_\varphi = \varphi(r)\frac{1}{p^3\left\|\overrightarrow{D_1D_2}\right\|}\sin\alpha_1\sin\alpha_2 ds_1 ds_2 \tag{5.24}$$

$$dA_\varphi = \frac{1}{\left\|\overrightarrow{D_1D_2}\right\|}\sin\alpha_1\sin\alpha_2 ds_1 ds_2 \tag{5.25}$$

Remarque : Cette fonction de pondération a été découverte par Stoka [48] et est explicitée par Santalo [45] page 161, sous la forme d'une mesure "invariante à gauche" dans le groupe des similitudes (qui est "le groupe plus large"). Insistons sur le fait que notre approche est très différente.

5.3.3 Obtention d'une mesure

5.3.3.1 Extension à une courbe convexe

Le fait d'avoir comme "brique de base" le quadrilatère associé (par la $T.P.$) à l'ensemble des droites qui coupent les deux segments disjoints est essentiel. En effet, considérons maintenant l'ensemble des droites coupant un polygone $\mathcal{P}$ convexe, de sommets P_i. Leurs pôles forment un ensemble de quadrilatères élémentaires $\Delta_{i,j(i\neq j))}$ associés chacun à deux segments de $\mathcal{P}$: $[P_i, P_{i+1}]$ et $[P_j, P_{j+1}]$. Pour chaque quadrilatère, les quatre sommets représentent les droites joignant les points (P_i, P_j), (P_i, P_{j+1}), (P_{i+1}, P_{j+1}) et (P_{i+1}, P_j).

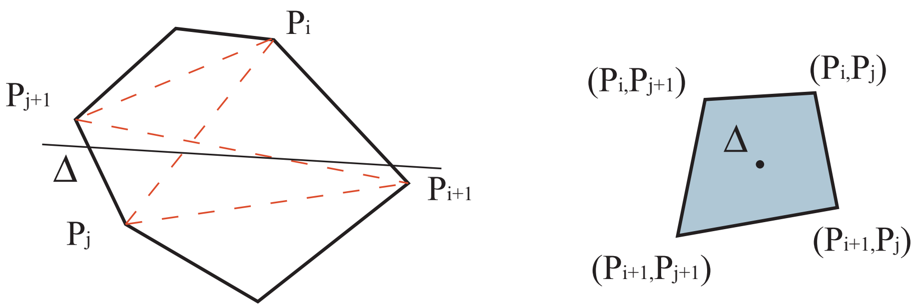


FIG. 5.9 – La "brique de base" $\Delta_{i,j(i\neq j)}$: le quadrilatère de pôles associés à deux segments du polygone $\mathcal{P}$.

La forme étant convexe, les quadrilatères $\Delta_{i,j(i\neq j)}$ sont disjoints (une droite ne peut couper que deux segments), ou plus précisément disjoints à un ensemble négligeable de mesure nulle près, celui des droites passant par les points P_i).

On peut étendre cette propriété à des formes convexes suffisamment "lisses", c'est-à-dire pour lesquelles il y a un sens à parler d'abscisse curviligne. On obtient alors un ensemble de quadrilatères dont l'aire totale peut être calculée par la relation :

$$A = \int \int_{T.P.(\Delta\mathcal{F})} d\mu_1 d\mu_2 = \int \int_{\mathcal{F}\times\mathcal{F}} \frac{1}{p^3 \left\| \overrightarrow{D_1 D_2} \right\|} \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 ds_1 ds_2 \qquad (5.26)$$

Donnons trois exemples d'ensembles de polygones obtenus à partir d'une forme convexe polygonalisée.

La figure 5.10 est la plus simple : à tout point-pôle situé dans le rectangle grisé

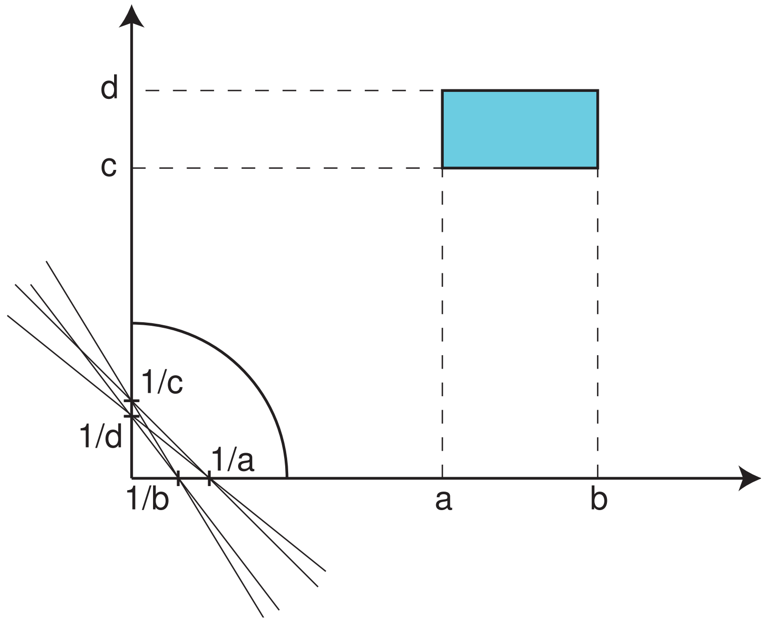


FIG. 5.10 – Ensemble des polaires associées aux pôles contenus dans le rectangle grisé. Ici on a l'illustration de la conversion d'une incertitude *ponctuelle* $(a = a_0 \pm \Delta a, b = b_0 \pm \Delta b)$ en une incertitude directionnelle.

$(a < x < b$ et $c < y < d)$ correspond sa droite polaire coupant Ox et Oy en une abscisse x telle que $\frac{1}{b} \leq x \leq \frac{1}{a}$ et une ordonnée y telle que $\frac{1}{d} \leq y \leq \frac{1}{c}$.

La figure 5.11 montre un triangle (ABC) et sa transformée polaire en forme de "sablier". Les trois zones colorées correspondent aux transformées polaires des trois sous-ensembles de droites coupant le triangle.

- La zone la plus sombre (non bornée) correspond aux droites qui coupent (AC) et (AB).
- La zone la plus claire correspond aux droites qui coupent (AB) et (CB). Elle est bornée car aucune droite ne passe par l'origine.
- La zone de couleur intermédiaire (non bornée) correspond aux droites qui coupent (AC) et (CB).

La figure 5.12 illustre la transformée polaire d'un polygone (inscrit dans un ellipse) formé de 20 segments. Chaque quadrilatère est l'ensemble des pôles des droites coupant deux segments. L'enveloppe, naturellement, est un polygone inscrit dans une hyperbole.

5.3.3.2 Définition de la mesure

Définition 12 *L'intégrale de la fonction caractéristique de T.P.(Δ), pondérée par la fonction $\varphi(r) = \frac{1}{r^3}$ et associée à l'ensemble des droites coupant la forme convexe $\mathcal{F}$ est*

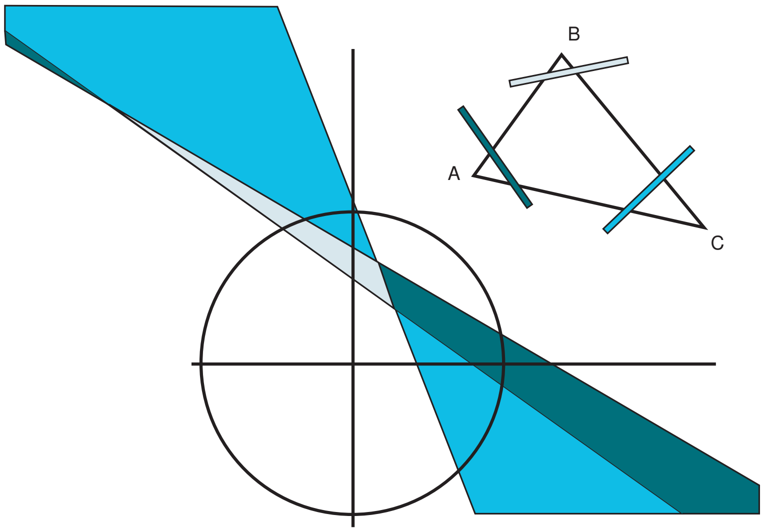


FIG. 5.11 – Ensemble de polygones obtenu par *T.P.* d'un triangle : on distingue trois familles de droites selon les côtés du triangle coupés.

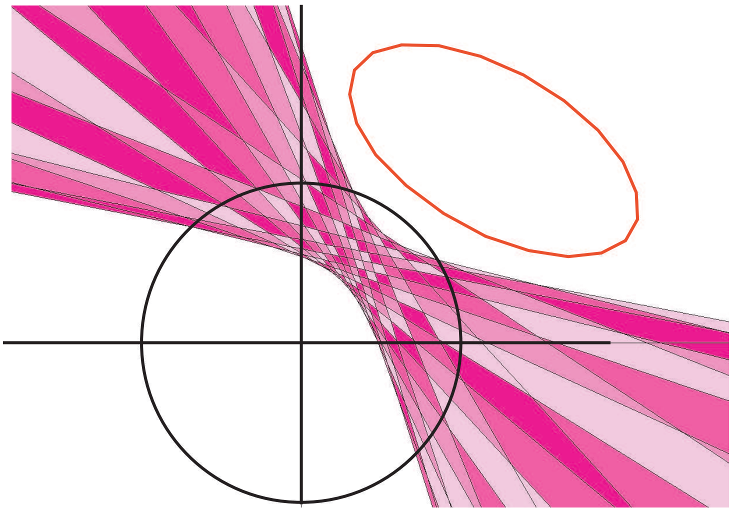


FIG. 5.12 – Ensemble de polygones obtenu par *T.P.* d'une ellipse polygonalisée.

une mesure, notée μ_2*, de l'ensemble des droites* Δ *:*

$$\mu_2(\Delta) = \int_{T.P.(\Delta\mathcal{F})} \int \varphi(r) d\mu_1 d\mu_2 = \int_{\mathcal{F}\times\mathcal{F}} \int \frac{1}{\left\|\overrightarrow{D_1 D_2}\right\|} \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \, ds_1 ds_2 \tag{5.27}$$

$\square$

5.3.4 Propriété de la mesure μ_2

5.3.4.1 Invariant par déplacement

Propriété 26 *La mesure μ_2 est indépendante des déplacements de la forme associée.* □

Preuve La mesure a été construite pour qu'il en soit ainsi, la fonction de poids compensant les variations d'aire. □

5.3.4.2 Propriété *P.A.*

Propriété 27 *La mesure μ_2 de l'ensemble des droites intersectant la forme convexe $\mathcal{F}$ est égale au périmètre $\mathcal{F}$. Ainsi, la T.P. présente la propriété P.A.* □

Preuve On applique la formule 5.27 à une forme $\mathcal{F}$ convexe fermée.

$$I = \int_{s_1=0}^{L} \int_{s_2=0}^{L} \frac{1}{D} \sin\beta_1 \sin\beta_2 ds_1 ds_2 \tag{5.28}$$

Or $\frac{ds_2}{\sin d\beta_1} = \frac{D}{\sin\beta_2}$ (Fig. 5.13) (formule classique de la géométrie du triangle). Donc :

$$I = \int_{s_1=0}^{L(\mathcal{F})} \int_{\beta_1=0}^{\pi} \frac{1}{D} \sin\beta_1 \sin\beta_2 \frac{D d\beta_1}{\sin\beta_2} ds_1 \tag{5.29}$$

$$I = \int_{s_1=0}^{L(\mathcal{F})} \int_{\beta_1=0}^{\pi} \sin\beta_1 d\beta_1 ds_1 \tag{5.30}$$

$$I = 2 \int_{s_1=0}^{L(\mathcal{F})} ds_1 = 2L(\mathcal{F}) \tag{5.31}$$

$$\mu_2(\Delta\mathcal{F}) = I = \int_{s_1=0}^{L(\mathcal{F})} \int_{\beta_1=0}^{\pi} \frac{1}{D} \sin\beta_1 \sin\beta_2 ds_2 ds_1 = 2L(\mathcal{F}) \tag{5.32}$$

Cette égalité est une relation classique en géométrie intégrale.

□

5.4 Transformée en cercle

5.4.1 Transformée en Cercles d'une forme

La transformée en cercles permet également d'associer à une droite de coordonnées (p, θ) deux points notés J_+ et J_-, éventuellement confondus, l'information étant redon-

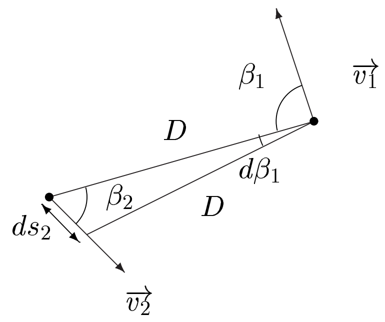


FIG. 5.13 – Relation entre $ds_2, d\beta_1, D$ et β_2.

dante entre l'intérieur du cercle $\mathcal{C}_{\sqrt{c}}$ [1] et l'extérieur.
Nous avons vu que ces points ont pour coordonnées polaires : $(p \pm \sqrt{p^2 - c}, \theta)$.

Définition 13 *La Transformée en Cercles $T.C._c(\mathcal{F})$ d'une forme convexe $\mathcal{F}$ est l'ensemble des points de coordonnées polaire $(p \pm \sqrt{p^2 - c}, \theta)$ associés aux droites (p, θ) coupant $\mathcal{F}$.*
□

5.4.2 Fonction de poids et mesure

La $T.C_c$ d'un polygone $\mathcal{P} = \{P_i\}$ convexe est un ensemble de quadrilatères curvilignes. En effet, chaque point P_i est associé à un cercle et non une droite. On obtient, pour chaque association deux à deux des segments du polygone, deux zones délimitées par quatre arcs de cercles (On pourra retenir que la zone est à l'intérieur de $\mathcal{C}_{\sqrt{c}}$).

On montre de manière analogue à ce qui a été fait précédemment pour la fonction de poids $\phi(r) = \frac{1}{r^3}$ que l'aire de la transformée pondérée par la fonction de poids $\varphi(r) = \frac{r^2-c}{r^3}$ est également une mesure de l'ensemble des droites Δ. De plus, on retrouve la propriété $P.A.$:

$$\int\int_{T.C._c(\Delta\mathcal{F})} \varphi(r) d\mu_1 d\mu_2 = 2L(\mathcal{F}) \tag{5.33}$$

5.4.3 Exemples

Les figures 5.15 et 5.16 illustrent respectivement la $T.C._{-1}$ d'un triangle et d'une ellipse vectorisée. Seule la partie intérieure au cercle unité est représentée.

[1]cercle centré à l'origine et de rayon $\sqrt{c}$

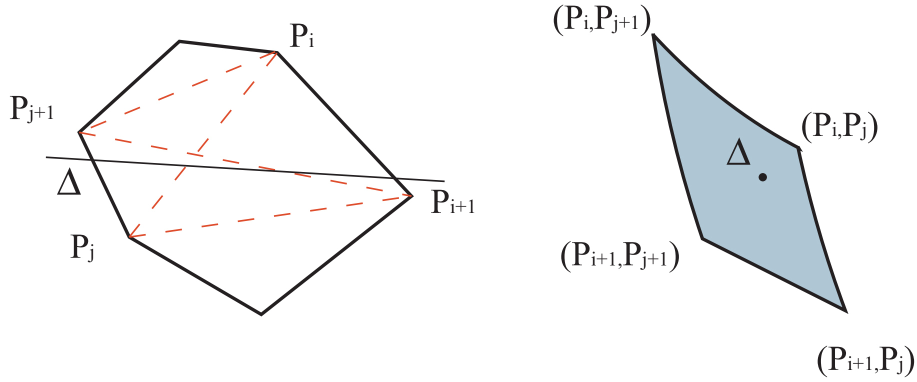


FIG. 5.14 – Une droite Δ coupe un polygone convexe selon deux segments $[P_i, P_{i+1}]$ et $[P_j, P_{j+1}]$. L'ensemble des points correspondants par une $T.C.$ constitue l'intérieur d'un quadrilatère curviligne (bords en arcs de cercle).

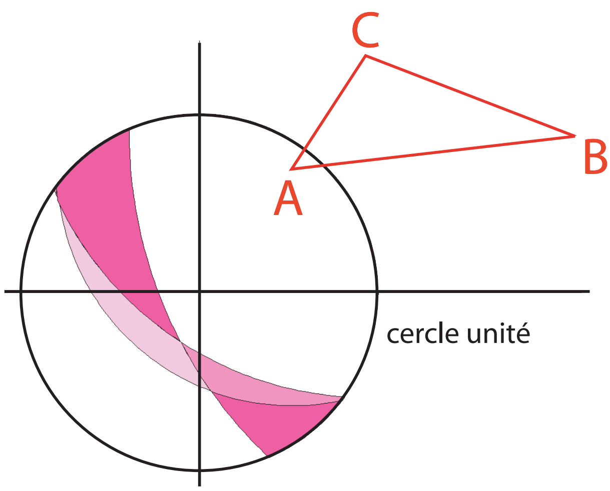


FIG. 5.15 – $T.C_{-1}$ d'un triangle : les arcs de cercles représentés font partie des cercles de centres respectifs A,B,C coupant le cercle unité selon un diamètre du cercle unité.

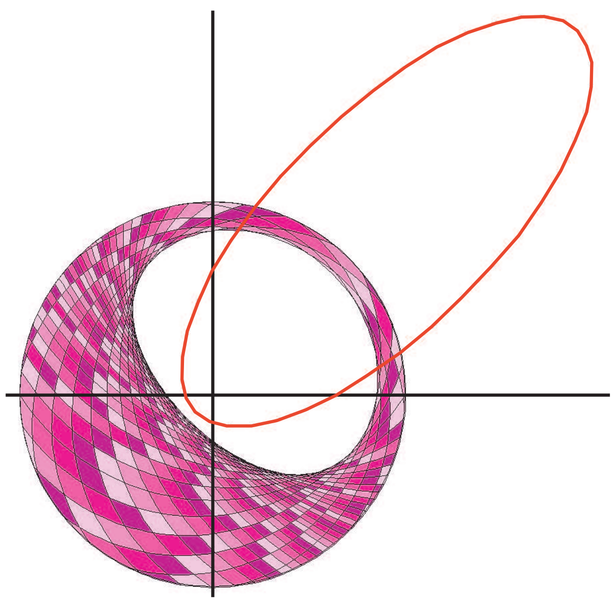


FIG. 5.16 – $T.C_{-1}$ d'une ellipse polygonalisée.

5.5 Cas des courbes non convexes

Les résultats obtenus précédemment peuvent être étendus aux formes non convexes. Il faut cependant tenir compte du nombre d'intersections de la droite Δ avec la forme $\mathcal{F}$: $n(\Delta, \mathcal{F})$. La relation 5.27 devient

$$\mu_2(\Delta) = \int\int_{T.P.(\Delta\mathcal{F})} \varphi(\rho) d\mu_1 d\mu_2 = \int\int_{\mathcal{F}\times\mathcal{F}} \frac{1}{\left\|\overrightarrow{D_1 D_2}\right\|} \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 ds_1 ds_2 \tag{5.34}$$

Remarque : La deuxième intégrale n'est pas modifiée.

Les figures 5.17 et 5.18 montrent un carré digitalisé dont les côtés suivent la trame des pixels et une de ses transformées en cercles. C'est une forme convexe, le nombre d'intersections $n(\Delta, \mathcal{F})$ est toujours égal à deux.

Si ce carré pivote légèrement (Fig. 5.19), il n'est plus aligné avec la trame et les segments deviennent des "marches d'escalier", le périmètre augmente sensiblement. La forme n'est plus convexe, et comme le montre la figure 5.20, les droites qui sont proches des côtés coupent de nombreuses fois la forme. Il apparaît quatre maxima correspondant au "bruit de pixellisation".

Enfin, le même résultat est donné pour une forme plus complexe (Fig. 5.21 et 5.22) où la non convexité n'est pas seulement due à la digitalisation. Il apparaît alors après la transformée en cercle de larges zones où le nombre d'intersections est élevé.

Fig. 5.17 – Carré digitalisé dontles côtés suivent la trame des pixels.

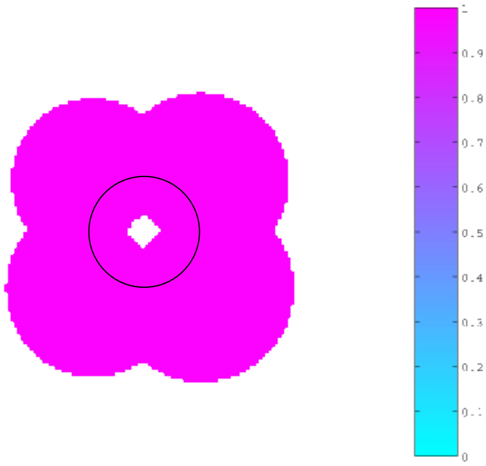


FIG. 5.18 – $T.C._{-1}$ du carré. Le cercle représenté est le cercle unité.

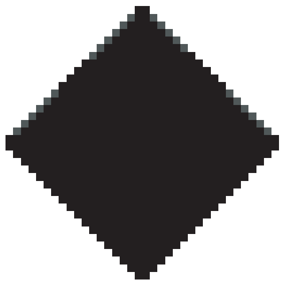


FIG. 5.19 – Carré digitalisé dont les côtés ne suivent pas la trame des pixels.

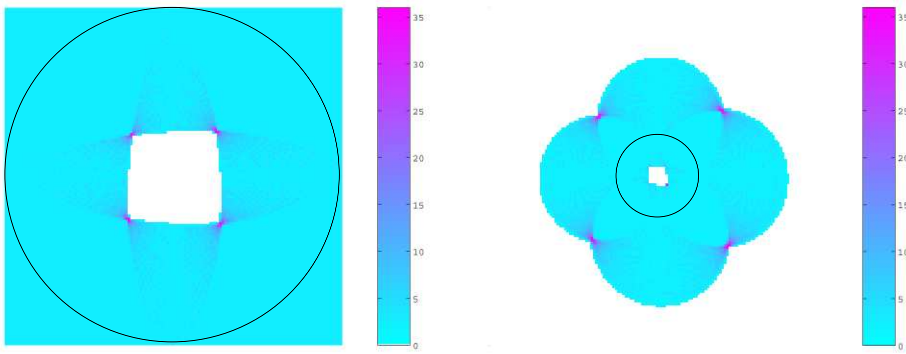


FIG. 5.20 – $T.C._{-1}$ de la forme précédente. Le cercle représenté est le cercle unité.

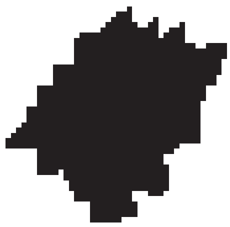


FIG. 5.21 – Forme non convexe.

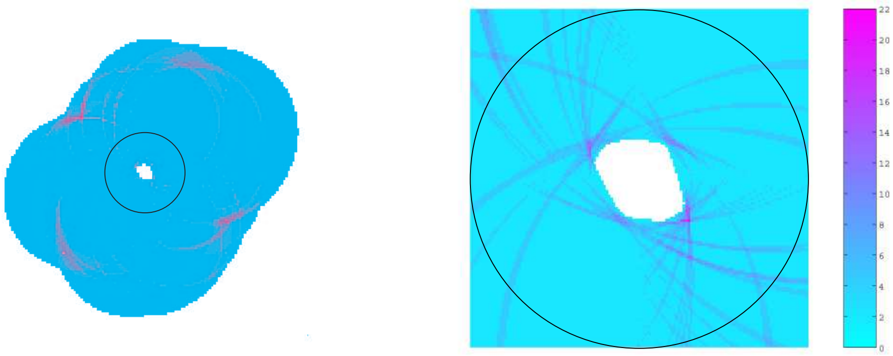


FIG. 5.22 – $T.C._{-1}$ de la forme précédente. Le cercle unité est en trait plein.

5.6 D'autres invariants

Stoka [48] a mis en évidence un certain nombre d'invariants pour des espaces divers. Citons-en quelques-uns :

1. L'ensemble Ω_2 des cercles $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ avec la paramétrisation (a, b, c) a pour mesure invariante :

$$\frac{da\ db\ dc}{(c - a^2 - b^2)^2} = \frac{1}{r^4} da\ db\ dc$$

2. L'ensemble des coniques du plan muni de la paramétrisation $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon)$ suivante :

$$\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 + 2\delta x + 2\epsilon y + 1 = 0$$

a pour mesure invariante :

$$\frac{d\alpha\ d\beta\ d\gamma\ d\delta\ d\epsilon}{\Delta^2}$$

avec $\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \delta \\ \beta & \gamma & \varepsilon \\ \delta & \varepsilon & 1 \end{vmatrix}$.

3. L'ensemble des droites de l'espace définies par a, p, b, q et

$\begin{cases} x = az + p \\ y = bz + q \end{cases}$ a pour mesure invariante :

$$\frac{da\ db\ dp\ dq}{(a^2 + b^2 + 1)^2}$$

Ce qui permet par exemple de démontrer que l'ensemble des droites qui coupent un domaine plan convexe d'aire S est égale à $\frac{\pi}{2}S$.

5.7 Conclusion

La démarche suivie dans ce chapitre repose sur la recherche d'invariant, ici fourni par le jacobien d'une transformation projective assurant une connection inattendue et "belle" entre deux géométries. Le chapitre suivant va nous permettre d'établir un lien avec une autre géométrie : la géométrie différentielle centro-affine.

Chapitre 6

Géométrie Différentielle Affine

La géométrie différentielle dite centro-affine définit des courbure, abscisse curviligne, normale spécifiques, particulièrement bien adaptées à l'étude de la Transformée Polaire d'une courbe paramétrée quelconque.

6.1 Introduction

La géométrie différentielle affine est le centre d'intérêt de nombreuses recherches [9] avec un renouveau important depuis une dizaine d'années [57]. Définie autour d'une équation différentielle relativement simple, elle permet de regrouper les courbes par classes d'équivalence "affine".

Ce chapitre rassemble avant tout des résultats que l'on peut trouver dans différents ouvrages [40] [56] .

6.1.1 Equation différentielle affine

Considérons une courbe paramétrée plane (C) d'équations :

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \tag{6.1}$$

Lemme : il existe deux fonctions $p_1(t)$, $p_2(t)$ telles que à la fois x et y soient solutions de l'équation différentielle linéaire à coefficients fonctionnels :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + p_1\frac{d\theta}{dt} + p_2\theta = 0 \tag{6.2}$$

Preuve Dire que x et y sont solutions de 6.2 revient à dire qu'elles sont solutions du système suivant (où l'on note par un accent la dérivation par rapport à la variable t).

$$\begin{cases} x'' + p_1x' + p_2x = 0 \\ y'' + p_1y' + p_2y = 0 \end{cases} \tag{6.3}$$

Ce qui, en considérant 6.3 comme un système linéaire, donne :

$$\begin{cases} p_1 = -\frac{xy''-x'y}{xy'-x'y} \\ p_2 = \frac{x'y''-x'y''}{xy'-x'y} \end{cases} \tag{6.4}$$

On aura noté que le dénominateur est le classique "wronskien" des deux solutions, non nul si et seulement si elles sont indépendantes ; nous excluons implicitement le cas de droites passant par l'origine.

Ainsi, on peut attacher à une courbe plane paramétrée une équation différentielle linéaire du second ordre (à coefficients en général non constants).

Réciproquement, une équation différentielle du type 6.2 dont on connaît deux solutions indépendantes x et y a toutes les fonctions suivantes pour solutions :

$$\begin{cases} \overline{x} = ax + by \\ \overline{y} = cx + dy \end{cases} \tag{6.5}$$

(déduites par transformation linéaire affine quelconque).

Et chacun de ces couples de solutions $(\overline{x}, \overline{y})$ détermine une courbe $(\overline{C})$.

L'équation 6.5 décrit une "(centro)-affinité" dans laquelle la courbe (C) a pour image la courbe $(\overline{C})$.

Par suite, l'équation différentielle 6.2 est attachée à une courbe et à toutes ses transformées affines. Etudier les propriétés des courbes attachées à l'équation différentielle 6.2, c'est étudier les propriétés de toutes les courbes associées d'un point de vue affine.

□

6.1.2 Courbure affine

Nous allons montrer qu'il est possible d'effectuer dans (6.2) un changement de paramètre $\tau \longrightarrow s$ de manière à obtenir une équation différentielle sans terme du premier ordre, c'est-à-dire de la forme suivante :

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} + k(s)\theta = 0 \tag{6.6}$$

Or d'une manière générale, un changement de paramètre $t \rightharpoonup \tau = \tau(t)$ dans (6.2) transforme cette équation différentielle en :

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} + \overline{p_1}\frac{d\theta}{d\tau} + \overline{p_2}\theta = 0 \tag{6.7}$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} p_1 = \tau'\overline{p_1} - \frac{\tau''}{\tau'} \\ p_2 = \tau'^2\overline{p_2} \end{array} \right. \tag{6.8}$$

Tout revient à établir que la condition $\overline{p_1} = 0$ peut être réalisée.
En effet, cette condition est équivalente, d'après 6.8, à :

$$\frac{\tau''}{\tau'} = p_1 \tag{6.9}$$

d'où

$$\tau' = a\exp(P_1(t)) \tag{6.10}$$

(en notant $P_1(t)$ une primitive de $p_1(t)$ et a une constante quelconque) ; soit, par une intégration supplémentaire,

$$\tau = aQ_1(t) + b \tag{6.11}$$

où $Q_1(t)$ est une primitive de $\exp(P_1(t))$ et b une constante quelconque. C'est cette fonction τ que l'on prend comme paramètre s.

Les deux degrés de liberté fournis par a et b dans 6.11 signifient qu'il y a une infinité de paramétrisations "s" et que deux telles paramétrisations $s_1 = a_1 Q_1(t) + b_1$ et $s_2 = a_2 Q_1(t) + b_2$ sont images affines l'une de l'autre :

$$s_1 = \alpha s_2 + \beta \tag{6.12}$$

La forme 6.6 sera appelée "forme canonique" ; elle est, d'après 6.12, invariante par tout changement affine de paramètre. C'est elle que nous allons prendre dans la suite en remplacement de 6.2.

On dit que s est l'abscisse curviligne affine et que $1/k$ est la courbure affine .

6.1.3 Liaison avec les caractéristiques classiques des courbes

Puisque $p_1 = 0$ dorénavant, les formules 6.4 donnent :

$$xy'' - x''y = 0 \tag{6.13}$$

Par suite, en intégrant 6.13 :

$$xy' - x'y = C \ \ (constante) \tag{6.14}$$

Lorsqu'on reporte 6.13 dans l'expression de p_2 figurant dans 6.4, on obtient :

$$x'y'' - x''y' = kC \tag{6.15}$$

où $k = k(s)$ est définie par 6.6.

Ces formules (12) et (13) ont différentes conséquences. D'abord, d'après la formule classique donnant l'aire A balayée par le rayon vecteur $\overrightarrow{OM}$ (M décrivant la courbe paramétrée par s), on a :

$$A = \frac{1}{2}\int_{s=s_1}^{s=s_2} (xy' - x'y)dt = \left[\frac{1}{2}Cs + D\right]_{s=s_1}^{s=s_2} \ \ (D \ : \ autre\ constante) \tag{6.16}$$

On retiendra, au travers de la formule $A = \frac{1}{2}Cs + D$, que l'aire balayée et l'arc affine sont liés de façon affine. Ensuite, le rayon de courbure ρ de la courbe (C) est donné par :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} = \frac{kC}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} \tag{6.17}$$

Par ailleurs, la distance p de l'origine à la tangente à la courbe au point (x, y) (qui fournit ce que l'on appelle la fonction support) est donnée par :

$$p = \frac{x'y - xy'}{(x'^2 + y'^2)^{1/2}} = \frac{C}{(x'^2 + y'^2)^{1/2}} \tag{6.18}$$

Des formules 6.17 et 6.18, on déduit que :

$$\rho p^3 = \frac{C^2}{k} \tag{6.19}$$

L'expression ρp^3 a donc un caractère affine. Les courbes pour lesquelles $k = cste \neq 0$ sont des coniques ; plus précisément, ce sont exactement toutes les coniques à centre (ellipses et hyerboles) centrées en 0.

En effet, distinguons les deux cas :

- $k > 0$: posons $k = c^2$. L'équation 6.6 admet deux solutions particulières : $x = \cos(ct)$ et $y = \sin(ct)$; la courbe correspondante est le cercle unité et donc ses images par une application linéaire, à savoir les ellipses de centre 0.

- $k < 0$: posons $k = -c^2$. L'équation 6.6 admet les solutions particulières : $x = e^{ct}$ et $y = e^{-ct}$, autrement dit l'hyperbole (équilatère) $xy = 1$, et donc toutes ses images par application linéaire, c'est-à-dire toutes les hyperboles de centre 0. Il convient de remarquer que, du fait de la relation 6.19, la propriété d'une courbe d'être une conique à centre équivaut à $\rho p^3 = const(\neq 0)$.

6.1.4 Liaison avec la Transformée Polaire

Soit $M(x, y)$ le point courant d'une courbe (C) qui satisfait à l'équation réduite 6.6. La tangente au point M à la courbe (C) a pour équation :

$$x'(Y - y) = y'(X - x) \tag{6.20}$$

(les dérivées marquées par des apostrophes sont à considérer par rapport à la variable s).

Cette droite a un pôle de coordonnées :

$$\xi = \frac{-y'}{x'y - xy'} = \frac{-y'}{C} \quad et \quad \eta = \frac{x'}{x'y - xy'} = \frac{x'}{C} \tag{6.21}$$

La courbe décrite par (ξ, η) est la Transformée Polaire $(\tilde{C})$ de (C).

Théorème 3 *Les rayons de courbure affines k de (C) et χ de $(\tilde{C})$ sont inverses l'un de l'autre :*

$$k\chi = 1$$

□

Preuve D'après (6.6), les dérivées première et seconde de ξ sont :

$$\xi' = \frac{-y''}{C} = \frac{ky}{C} \tag{6.22}$$

$$\xi'' = \frac{ky'}{C} + k'\frac{y}{C} = -k\xi + k'\frac{\xi'}{k} \tag{6.23}$$

Autrement dit, ξ satisfait à l'équation différentielle :

$$\left(\frac{\xi'}{k}\right)' + \xi = 0 \tag{6.24}$$

Un raisonnement identique montre que η vérifie la même équation différentielle. En effectuant le changement de variable

$$\sigma = ks \tag{6.25}$$

l'équation 6.24 devient :

$$\frac{d^2\xi}{d\sigma^2} + \frac{1}{k}\xi = 0 \tag{6.26}$$

La comparaison de 6.26 et de 6.6 fournit le résultat recherché.

□

Remarques :

1. On retrouve le fait, établi antérieurement (4.2.0.1), que les coniques (cas où $k = const.$) se transforment en coniques ($\chi = const.$) par Transformée Polaire.

2. On retrouve aussi le cas limite où une droite (rayon de courbure infini) a pour image par Transformée Polaire un point (rayon de courbure nul).

Exemple d'application du théorème :
Soit (C) la courbe paramétrée :

$$\begin{aligned} x &= \cos t + 0.25\cos 2t \\ y &= \sin t + 0.25\sin 2t \end{aligned}$$

qui est une courbe fermée (en rouge sur la figure 6.1) présentant un méplat en B.

Son image $(\tilde{C})$ par T.P. est la courbe bleue d'équations paramétriques :

$$\begin{aligned} x &= \frac{(8\cos t + 4\cos 2t)}{D} \\ y &= \frac{(8\sin t + 4\sin 2t)}{D} \end{aligned}$$

avec $D = 3(3 + 2\cos t)$.

Sur la figure sont représentés deux points en correspondance $A(-0.25, 1)$ et $A'(-4/9, 8/9)$ de courbures affines respectives 1,1 et 0,9 (valeurs approchées).
Les courbures affines en B et B' sont respectivement $+\infty$ et 0.

Le résultat du théorème permet d'échanger un "phénomène à variation rapide" avec un "phénomène à variation lente".

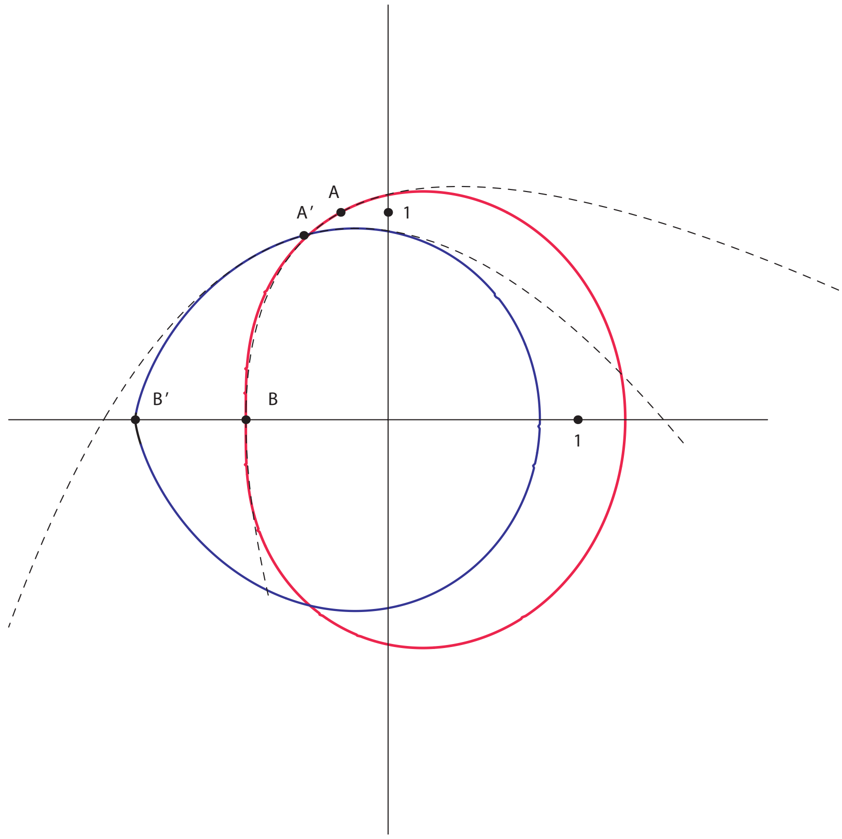


FIG. 6.1 –

6.1.5 Coniques osculatrices et normale affine

Considérons un repère tel que le point de référence de (C) soit $M(x = 0, y = 1)$ et que le vecteur tangent en ce point soit $(x' = 1, y' = 0)$. Avec ces valeurs initiales, nous pouvons déduire, en utilisant 6.6 de proche en proche, les valeurs suivantes pour les dérivées de x et de y au point considéré :

$$x = 0,\ x' = 1,\ x'' = 0,\ x''' = -k,\ x'''' = -2k', ... \tag{6.27}$$

$$y = 1,\ y' = 0,\ y'' = -k,\ y''' = -k',\ y'''' = k^2 - k'', ... \tag{6.28}$$

Nous avons donc, au voisinage du point M, le développement :

$$\begin{cases} x = h - \frac{k}{6}h^3 - \frac{k'}{12}h^4 + ... \\ y = 1 - \frac{k}{2}h^2 - \frac{k'}{6}h^3 + \frac{k^2-k''}{24}h^4 + ... \end{cases} \tag{6.29}$$

Il résulte de ces formules que la parabole osculatrice à (C) en M a pour équation cartésienne (Fig 6.2) :

$$y = 1 - \frac{k}{2}x^2 \tag{6.30}$$

Par comparaison avec la formule $x^2 = 2py$ où p est le paramètre de la parabole (distance foyer-directrice), on a :

$$k = \frac{1}{p} \tag{6.31}$$

La courbure affine est l'inverse du paramètre de la parabole osculatrice.

Terminons en déterminant les coniques d'équation :

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0 \tag{6.32}$$

qui ont au point M un contact d'ordre 4 avec la courbe (C) afin de dégager la notion de normale affine.

En substituant à x et y les expressions 6.29, et en se limitant à l'ordre 3, on a :

$$ah^2+2b(h-\frac{k}{6}h^3)(1-\frac{k}{2}h^2)+c(1-\frac{k}{2}h^2-\frac{k'}{6}h^3)^2+2d(h-\frac{k}{6}h^3)+2e(1-\frac{k}{2}h^2-\frac{k'}{6}h^3)+f = 0$$

Écrivons la nullité des coefficients
- de h^0 : $c + 2e + f = 0$ d'où $f = -c - 2e$.
- de h^1 : $b + d = 0$ d'où $d = -b$
- de h^2 : $a - ck - ek = 0$ d'où $a = (c + e)k$.
- de h^3 : $4bk + ck' + dk + ek' = 0$

d'où $(c + e)k' = -3bk$ soit $b = -\frac{k'}{3k}(c + e)$

D'après ce qui précède, l'ensemble solution (coniques ayant un contact d'ordre 4) peut se mettre sous la forme :

$$(c + e)kx^2 - 2\frac{k'}{3k}(c + e)xy + cy^2 + 2\frac{k'}{3k}(c + e)x + 2(c + e)y - 2cy - 2(c + e) + c = 0$$

que l'on peut réécrire en posant :

$$\lambda = \frac{c}{c + e} \tag{6.33}$$

sous la forme du faisceau de coniques :

$$\left[kx^2 - \frac{2}{3}\frac{k'}{k}xy + \frac{2}{3}\frac{k'}{k}x + 2y - 2\right] + \lambda(y-1)^2 = 0 \tag{6.34}$$

L'ensemble des centres de ces coniques constitue ce que l'on appelle la normale affine à la courbe au point M. Un calcul simple montre qu'elle a pour équation :

$$3kx = k'(y-1) \tag{6.35}$$

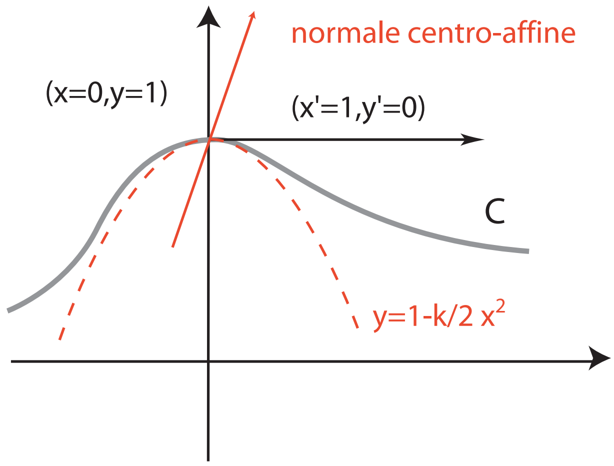


FIG. 6.2 – Exemple de parabole osculatrice et de normale affine.

6.2 Vers une approche plus synthétique

On peut donner une présentation plus compacte des calculs précédents amenant à la notion d'abscisse curviligne affine en considérant une équation différentielle linéaire *vectorielle* du second ordre, sans second membre :

$$P, Q \in \mathbb{R}^{2\times 2} \tag{6.36}$$
$$Y \in \mathbb{R}^2 \tag{6.37}$$
$$Y'' + PY' + QY = 0 \tag{6.38}$$

Remarque : Le système 6.3 se met sous la forme 6.38 avec $P = p_1 I$ et $Q = p_2 I$ où I est la matrice identité d'ordre 2.

Effectuons le double changement de variable :

$$\begin{cases} Y = SX \\ X = X(\xi) \end{cases} \tag{6.39}$$

où S est une matrice 2×2.

Convenons de noter $\frac{d}{d\xi}$ (resp. $\frac{d}{dx}$) par un point (resp. par un signe prime).

On obtient alors :

$$Y' = S'X + S\dot{X}\xi' \tag{6.40}$$
$$Y'' = S''X + 2S'\dot{X}\xi' + S\ddot{X}\xi'^2 + S\dot{X}\xi'' \tag{6.41}$$

En reportant dans 6.38 :

$$S''X + 2S'\dot{X}\xi' + S\ddot{X}\xi'^2 + S\dot{X}\xi'' + P(S'X + S\dot{X}\xi') + QSX = 0 \tag{6.42}$$
$$(\xi'^2 S)\ddot{X} + (2\xi' S' + \xi' PS + \xi'' S)\dot{X} + (S'' + PS' + QS)X = 0 \tag{6.43}$$

Pour le cas particulier qui nous intéresse, c'est-à-dire lorsque la matrice S est constante, $S' = S'' = 0$, 6.43 devient :

$$\xi'^2\ddot{Y} + (\xi' P + \xi'' I)\dot{Y} + QY = 0 \tag{6.44}$$

Le coefficient de $\dot{Y}$ peut être annulé si et seulement si $P = p(x)I$ avec :

$$\frac{\xi''}{\xi'} = p(x) \tag{6.45}$$

Soit par deux intégrations successives :

$$\xi = \int Ae^{-P(x)}dx + B \tag{6.46}$$

où $P(x)$ est une primitive de $p(x)$. Cette dernière relation est bien de la forme $As + B$ (voir 6.12).

6.3 Les paraboles : géodésiques d'une métrique

Définissons de manière préliminaire un terme que nous aurons à réemployer dans la suite : nous appellerons "élément de contact" plan la donnée d'un point et d'une droite passant par ce point, ce que l'on peut considérer comme équivalent à la donnée d'un couple (A, AM), où A et M sont des points distincts du plan.

Etant donné un triangle ABC, il existe une unique parabole ayant comme éléments de contact (A, AB) et (C, CB), c'est-à-dire tangente en A à AB et en C à BC.

Plus précisément, la théorie des courbes de Bézier (d'ordre 2) permet à la fois de montrer l'existence et l'unicité de cet arc de parabole en en produisant une construction par l'algorithme de De Casteljau. Celui-ci consiste, pour une valeur donnée de t (avec $0 \leq t \leq 1$), à définir successivement (Fig. 6.3) :

– D barycentre de A (poids (1-t)) et de B (poids t),
– E barycentre de B (poids (1-t)) et de C (poids t),
– M barycentre de D (poids (1-t)) et de E (poids t).

La parabole recherchée est l'ensemble des points M lorsque t décrit [0,1] (on peut, bien sûr, prolonger cet arc, en ne se restreignant pas à ces valeurs).

Théorème 4 $\frac{aire(ADM_t)}{aire(ABC)} = t^3$.
C'est-à-dire que le rapport entre l'aire hachurée (aire du triangle ADM) et l'aire du triangle de référence ABC croit en "puissance cube" lorsque M se déplace sur la courbe (Fig. 6.3). □

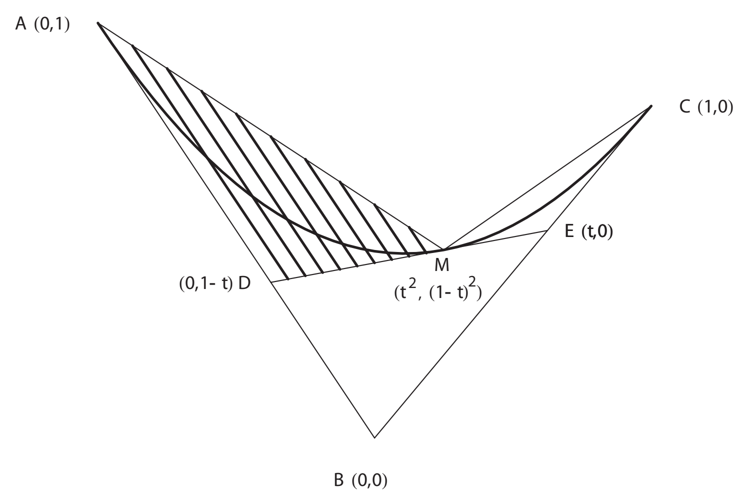


FIG. 6.3 – Parabole définie par les deux éléments de contacts (A, AB) et (C, BC) : Construction de De Casteljau.

Preuve Le concept d'aire est une notion métrique mais celui de quotient d'aires est une notion affine (c'est-à-dire invariante par toute transformation affine). On peut donc prendre le repère affine naturel constitué par :
– l'origine B,
– $\overrightarrow{BC}$ pour vecteur unitaire de l'axe des abscisses,
– $\overrightarrow{BA}$ pour vecteur unitaire de l'axe des ordonnées avec A(0,1),

et considérer qu'une certaine transformation affine a amené ce repère à être orthonormé. Les points D et M ont, dans ce repère, les coordonnées respectives $(1-t, t)$ et $((1-t)^2, t^2)$.

L'aire du triangle ABC est clairement $1/2$.
Nous calculerons l'aire du triangle ADM avec la formule classique :

$$aire(ADM_t) = \frac{1}{2}\det\begin{pmatrix} x_A & x_D & x_M \\ y_A & y_D & y_M \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\det\begin{pmatrix} 0 & 0 & t^2 \\ 1 & 1-t & (1-t)^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}t^3$$

Ce qui achève la démonstration.
□

Remarque : on aurait pu mener un calcul très semblable avec des coordonnées barycentriques.

Ce théorème va permettre de construire une distance adaptée à notre étude.

D'abord, remarquons que, par raison de symétrie, on a la formule :

$$\frac{aire(MEC)}{aire(ABC)} = (1-t)^3$$

Par suite :

$$\sqrt[3]{\frac{aire(ADM)}{aire(ABC)}} + \sqrt[3]{\frac{aire(MEC)}{aire(ABC)}} = 1$$

ou encore

$$\sqrt[3]{aire(M_0 \ \rightarrow \ M_t)} + \sqrt[3]{aire(M_t \ \rightarrow \ M_1)} = \sqrt[3]{aire(M_0 \ \rightarrow \ M_1)}$$

permet de définir une nouvelle métrique ayant la propriété suivante :

$$d(M_0, M_t) + d(M_t, M_1) = d(M_0, M_1)$$

autrement dit fournissant l'EGALITE du triangle pour des points situés SUR la parabole.

Remarque : On sait par ailleurs (démonstration qui remonte à Archimède...) que l'aire comprise entre tout arc de parabole M_1M_2 et la corde correspondante est égale aux $\frac{2}{3}$ du triangle formé par la corde et les tangentes à la parabole aux points M_1 et M_2.

On pourrait, dans ce qui précède remplacer, l'aire des triangles par les aires comprises entre arcs ou cordes.

Il est tentant de dire que cette distance a comme géodésiques des (arcs de) paraboles.

En effet, on a ici un parallèle avec le modèle de Poincaré de la géométrie hyperbolique, où les géodésiques sont des arcs de cercles orthogonaux au cercle unité.
Dans les deux cas, il faut travailler dans un plan euclidien "réinterprété" (faute de quoi les géodésiques resteraient des segments de droites).

Cette réinterprétation, dans notre cas, consiste à parler des paraboles en tant que géodésiques dans l'espace des "éléments de contact" (introduit tout au début). C'est un espace typique de la géométrie différentielle.

Nous venons ainsi de mettre en place d'une façon différente la géométrie plane "différentielle affine" (à ne pas confondre avec la géométrie affine "tout court"). Sous cette forme, elle commence à avoir des applications en imagerie [1].

6.4 Conclusion

Toutes les notions que nous venons de dégager pour les courbes planes ont leur équivalent pour les courbes dans $\mathbb{R}^n$. Il existe d'ailleurs une recherche active concernant les surfaces et hypersurfaces en géométrie différentielle affine, avec l'étude d'équations telles que celle de Korteweg De Vries [49]. Celle-ci se fait dans le cadre notamment de structures finsleriennes.

Conclusion

Ce travail a été orienté vers la recherche de **modèles** pertinents permettant la solution et/ou l'interprétation de questions anciennes ou d'autres plus actuelles en **imagerie**.

En ce qui concerne **l'espace des cercles**, au delà d'une présentation générale qui synthétise des notions éparses dans la littérature, nous avons proposé différentes réinterprétations originales d'algorithmes géométriques.

Il s'agit d'abord des diagrammes des k-ièmes plus proches voisins avec le cas particulier de l'arbre associé au plus éloigné (Farthest Point Voronoi diagram) [26], ainsi que du problème de recherche du cercle circonscrit à un nuage de points de taille minimum pour lequel deux algorithmes sont proposés. L'un qui relève de la programmation linéaire randomisée, l'autre d'une adaptation de la morphologie mathématique.

La **Transformée de Hough** a eu un rôle moteur dans la mise en place des **Transformées Polaire** et en Cercles [3]. Nous avons montré que toutes ces transformées s'interprètent dans le cadre de l'espace des cercles. La partie originale concerne une interprétation géométrique de la quantification de **l' erreur d'alignement** en termes de moindres carrés grâce à la notion de puissance et à la représentation pole/polaire. Ce qui nous a amené à montrer l'échange entre un **incertitude ponctuelle** "elliptique" en une **incertitude tangentielle** "hyperbolique" en général.

Les très riches propriétés de la Transformée Polaire ("transformée par polaires réciproques") sont méconnues de la "communauté image". Nous avons établi son rôle central, en quasi-équivalence avec la transformée de Hough. En étroite analogie avec cette dernière, nous avons mis en évidence une **mesure invariante par translation** en $\frac{1}{p^3}$ (obtenue de manière très différente par Stoka [48]) et il s'agit là, à notre sens, d'un des résultats les plus significatifs de ce mémoire, établissant une forte connection avec la **géométrie intégrale**.

Enfin, le dernier chapitre a proposé un cadre, lui aussi méconnu, pour l'étude de la transformée polaire, celui de la **géométrie différentielle affine** [53] (et les géométries apparentées équi-affine, centro-affine... [33][29]). On dispose ainsi d'un outil qui, généralisé à des espaces de dimension plus élevées, rejoint la géométrie différentielle, notamment dans le cadre d'espaces fibrés, de grassmanniennes...[57].

Avec ce travail théorique, nous avons atteint un certain objectif, à la fois en termes de résultats nouveaux et **d'interconnexions entre domaines différents** . Nous avons entrevu, sans les développer, des exploitations pratiques des idées présentées, notamment dans le domaine de l'imagerie. Celles-ci ne manqueront pas, nous semble-t-il, de faire l'objet de travaux futurs.

Annexe A

L'inversion

Définition 14 *L'inversion I_k, $k \in \mathbb{R}^{*+}$, associe au point M de $\mathbb{R}$ le point M' du plan définie par*

$$M' = \frac{kM}{\|M\|^2} \tag{A.1}$$

□

L'inversion I_k est une transformée point à point. La relation A.1 peut être réécrite sous la forme $\overline{OM}.\overline{OM}' = k$ avec les point O, M et M' alignés (Fig. A.1). Ainsi, plus un point est proche de l'origine O, plus son image par inversion sera éloignée de O.

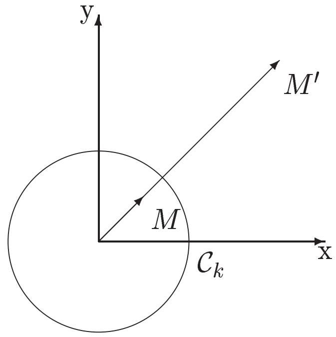


FIG. A.1 – Illustration de l'inversion d'un point

Propriété 28 *Les points invariants par I_k se situent sur le cercle $\mathcal{C}_k$ de rayon $r = \sqrt{k}$. Les points M et $I_k(M)$ se situent de part et d'autre de $\mathcal{C}_k$.* □

On peut généraliser la définition précédente de la façon suivante :

Définition 15 *L'inversion généralisée I_k^c associe au point X de $\mathbb{R}$ le point X' du plan défini par $X' = \frac{kX}{\|X\|^2+c}$.* □

Annexe B

Transformations projectives

B.1 Définition

Soit la matrice P=$\left(\begin{array}{cc|c} \alpha & \delta & m \\ \beta & \omega & n \\ \hline p & q & d \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} A & B \\ C & d \end{array}\right)$ avec $det(P) \neq 0$.

où B est un vecteur colonne et C un vecteur ligne.

Définition 16 *On appelle transformation projective associée à la matrice P l'application suivante :*

$$\left\{ \begin{array}{c} \mathbb{R}^2 \backslash \Delta_P \to \mathbb{R}^2 \\ X \to X' = \frac{AX+B}{CX+d} = \left(\frac{\alpha x + \delta y + m}{px+qy+d}, \frac{\beta x + \omega y + n}{px+qy+d} \right) \end{array} \right. \tag{B.1}$$

où Δ_P est la droite d'équation $CX + d = px + qy + d = 0$. □

Cette équation à toujours un sens sauf si le dénominateur est nul. C'est pourquoi la droite Δ_P n'appartient pas à l'ensemble de définition.

Afin de justifier les écritures précédentes, il suffit (en pensant à ce qui a été fait pour les cercles en 1.3.1) d'ajouter une coordonnée d'homogénéisation t. Les vecteurs $X(x, y, t)$ et $X'(x', y', t')$ sont considérés comme équivalents s'ils sont définis à un facteur près, i.e. s'il existe λ tel que $X = \lambda X'$:

$$\left(\begin{array}{c} x \\ y \\ t \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{c} x/t \\ y/t \\ 1 \end{array} \right)$$

Les vecteurs tels que $t = 1$ seront les représentants de leur classe d'équivalence.

Ainsi, si on applique la matrice P au vecteur $\left(\begin{array}{c} X \\ 1 \end{array} \right)$

$$\left(\begin{array}{c} AX + B \\ CX + d \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} A & B \\ C & d \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} X \\ 1 \end{array} \right) \tag{B.2}$$

Le vecteur $\begin{pmatrix} AX+B \\ CX+d \end{pmatrix}$ est ainsi équivalent au vecteur $\begin{pmatrix} \frac{AX+B}{CX+d} \\ 1 \end{pmatrix}$, ce qui justifie bien la relation B.1.

B.2 Exemple

Considérons la transformation projective associée à la matrice $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Les relations entre (x, y) et (x', y') sont donc d'après B.1 les suivantes :

$$x' = \frac{2x+1}{x+y+1} \quad \textit{et} \quad y' = \frac{x+y}{x+y+1} \tag{B.3}$$

Les transformations projectives permettent de réaliser des effets de perspective que l'on peut mettre en évidence en appliquant P à un damier (Fig. B.2).

Les points tels que $x + y + 1 = 0$ n'auront pas d'image, on dit qu'ils sont "envoyés" à l'infini.
Les colonnes de la matrice P sont définies par les coordonnées des points de fuite ($(2, 1)$ et $(0, 1)$ pour notre exemple) et la position de l'observateur $(0, 1)$, auxquelles on adjoint une troisième coordonnée projective 1 puisque ce sont tous des points à distance finie.

Remarque : une transformation projective conserve l'alignement et les birapports, mais non les angles et les distances. Le rapport entre les aires d'une case du damier et de son image dépend largement de la position initiale de la case (plus on se rapproche des points de fuites, plus les aires sont faibles). Cependant il existe une propriété concernant les rapports d'aires décrite dans le théorème de l'annexe C.

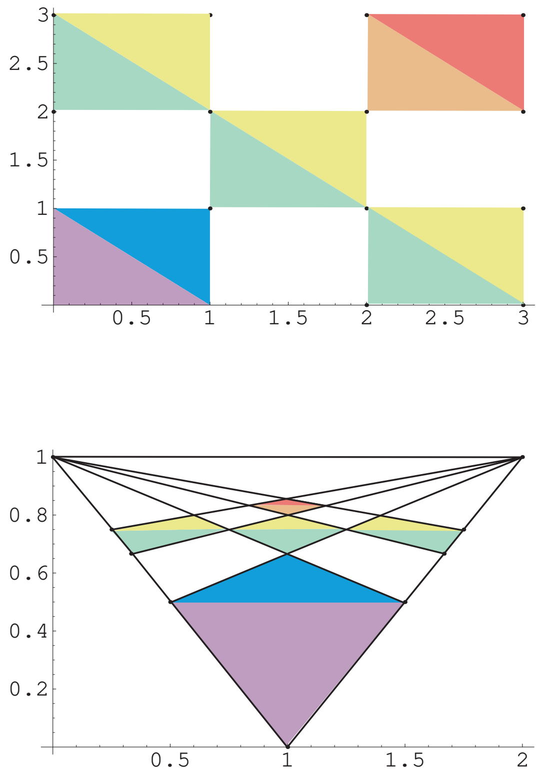


FIG. B.1 – Effet d'une transformation projective sur un damier.

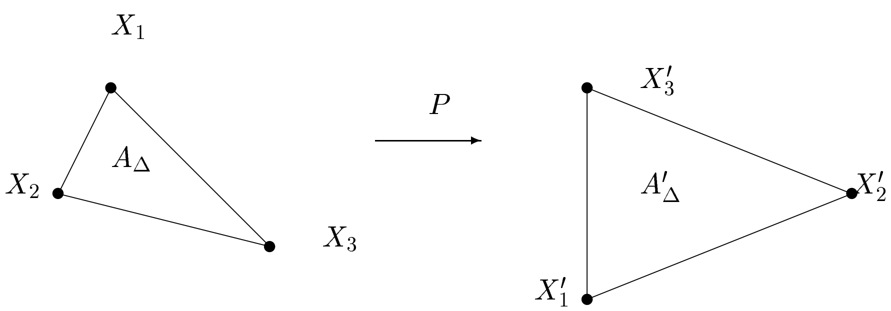


FIG. B.2 – Image d'un triangle par transformation projective.

Annexe C

Le jacobien d'une transformation projective

Nous donnons ici deux démonstrations de la propriété suivante :

Propriété 29 *La transformation projective f, associée à la matrice $P = \begin{pmatrix} A & B \\ C & d \end{pmatrix}$, telle que $f(X) = \frac{AX+B}{CX+d}$, avec A matrice de taille (2×2), B et C^T des vecteurs et d un réel a pour jacobien :*

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial x'}{\partial x} & \frac{\partial y'}{\partial x} \\ \frac{\partial x'}{\partial y} & \frac{\partial y'}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{\det [P]}{(CX+d)^3} \tag{C.1}$$

□

C.1 Première preuve

Le jacobien est le rapport des aires d'un triangle infinitésimal et de son triangle image par la transformation.
Soient trois points (X_1, X_2, X_3) et leurs images (X'_1, X'_2, X'_3) par la transformation projective f associée à la matrice P.

L'aire A'_Δ du triangle formé par les points (X'_1, X'_2, X'_3) a pour valeur :

$$A'_\Delta = \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} X'_1 & X'_2 & X'_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{C.2}$$

Les points X'_k étant les images par P des points X_k, on peut écrire

$$A'_\Delta = \tfrac{1}{2} \det \begin{pmatrix} \frac{AX_1+B}{CX_1+d} & \frac{AX_2+B}{CX_2+d} & \frac{AX_3+B}{CX_3+d} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{C.3}$$

$$A'_\Delta = \tfrac{1}{2E} \det \begin{pmatrix} AX_1+B & AX_2+B & AX_3+B \\ CX_1+d & CX_2+d & CX_3+d \end{pmatrix} \tag{C.4}$$

avec $E = (CX_1 + d)(CX_2 + d)(CX_3 + d)$; soit :

$$A'_\Delta = \frac{1}{2E} \det \left[\begin{pmatrix} A & B \\ C & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right] \tag{C.5}$$

$$A'_\Delta = \frac{1}{2E} \det \begin{pmatrix} A & B \\ C & d \end{pmatrix} \underbrace{\det \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{2.A_\Delta} \tag{C.6}$$

$$\frac{A'_\Delta}{A_\Delta} = \frac{1}{E} \det \begin{pmatrix} A & B \\ C & d \end{pmatrix} \tag{C.7}$$

D'où la relation C.1 quand on passe à des triangles infinitésimaux car alors $E \simeq (CX + d)^3$.

C.2 Deuxième preuve

La dérivée de f est une matrice de taille (2×2) qui agit sur un "vecteur d'accroissement" H. On a les deux équations suivantes :

$$(CX + d)f(X) = AX + B \tag{C.8}$$

$$[(C(X + H) + d)f(X + H)] = AX + AH + B \tag{C.9}$$

$$\tag{C.10}$$

D'où

$$\underbrace{CH}_{\in \mathbb{R}} \underbrace{f(X + H)}_{\in \mathbb{R}^2} + \underbrace{[CX + d]}_{\in \mathbb{R}} \underbrace{(f(X + H) - f(X))}_{\in \mathbb{R}^2} = \underbrace{AH}_{\in \mathbb{R}^2} \tag{C.11}$$

On prend H infiniment petit ; f étant continue, on obtient alors :

$$CH\ f(X) + (CX + d)\ f'(X).H = AH \tag{C.12}$$

$$CH \frac{AX+B}{CX+d} + (CX + d)f'(X).H = AH \tag{C.13}$$

$$f'(X) = \frac{(CX + d)A - C(AX + B)}{(CX + d)^2} \tag{C.14}$$

On reconnaît dans la dernière équation la dérivée classique d'un quotient de fonctions. Par calcul formel, on trouve :

$$\det f' = \frac{\det [P]}{(CX + d)^3} \tag{C.15}$$

C.3 Remarques

1) La relation C.6 indique que $A_\Delta = 0 \Rightarrow A'_\Delta = 0$, autrement dit que si trois points (X_1, X_2, X_3) sont alignés, alors leurs images (X'_1, X'_2, X'_3) par transformation projective le sont aussi.

2) La relation équivalente à C.1 pour une transformation projective de l'espace (avec A matrice 3×3) a pour second membre :

$$\frac{det(P)}{(CX + d)^4} \tag{C.16}$$

Annexe D

Trois mesures équivalentes : linéique, surfacique et surfacique compensée

Au travers de ce que l'on pourrait appeler une "figure clé" (Fig. D.1), nous proposons de mettre en évidence une équivalence remarquable entre trois mesures de natures différentes.

Nous illustrons cette propriété sur un ensemble élémentaire de droites coupant un triangle donné suivant deux cotés fixés, un des sommets étant ainsi séparé des deux autres.

Soit $(\mathcal{C}_1)$ le cercle de rayon $R = 1$ centré à l'origine et $(\mathcal{C})$ le cercle de rayon $r = \frac{1}{2}$ centré en $(0, -0.5)$. Ce dernier a pour image par transformée polaire la parabole $(\mathcal{P})$ d'équation :

$$y = \frac{x^2}{4} - 1$$

Soient trois points A_1, A_2 et A_3 appartenant à $(\mathcal{C})$. On s'intéresse à la mesure Δ des droites qui séparent le point A_2 des points A_1 et A_3.

Les polaires $TP(A_1), TP(A_2), TP(A_3)$ associées à ces trois points sont tangentes à $(\mathcal{P})$. Appelons $\{B_1, B_2, B_3\}$ leurs points d'intersection mutuels.

Convenons de définir également les points C_1,C_2 et C_3 comme intersection des droites (A_1O),(A_2O) et (A_3O) avec $(\mathcal{C}_1)$.

Propriété 30 *La mesure Δ peut être exprimée sous les trois formes suivantes :*

$$\Delta = A_1A_2 + A_2A_3 - A_1A_3 \tag{D.1}$$

$$\Delta = \int_T \frac{1}{p^3} \ \ avec\ T = interieur\ du\ triangle\ B_1B_2B_3 \tag{D.2}$$

$$\Delta = \ deux\ fois\ l'aire\ du\ triangle\ C_1C_2C_3 \tag{D.3}$$

□

Preuve Les deux premières relations ont été vues au chapitre 5.

Il reste à démontrer D.3. L'équation D.1 peut aussi s'écrire :

$$\Delta = 2r\sin\theta_1 + 2r\sin\theta_3 - 2r\sin\theta_2 \tag{D.4}$$

$$\Delta = \sin\theta_1 + \sin\theta_3 - \sin(\theta_1 + \theta_3) \tag{D.5}$$

$$\Delta = 2\sin\frac{\theta_1+\theta_3}{2}\cos\frac{\theta_1-\theta_3}{2} - 2\sin\frac{\theta_1+\theta_3}{2}\cos\frac{\theta_1+\theta_3}{2} \tag{D.6}$$

$$\Delta = 2\sin\frac{\theta_1+\theta_3}{2}(\cos\frac{\theta_1-\theta_3}{2} - \cos\frac{\theta_1+\theta_3}{2}) \tag{D.7}$$

$$\Delta = \frac{1}{2}2\sin\frac{\theta_1+\theta_3}{2}2\sin\frac{\theta_1}{2}2\sin\frac{\theta_3}{2} \tag{D.8}$$

$$\Delta = \frac{1}{2}C_1C_3.C_2C_3.C_1C_2 \tag{D.9}$$

On reconnaît dans l'expression D.9 une formule classique du triangle, avec $R = 1$ le rayon du cercle et S son aire :

$$\Delta = \frac{1}{2}4RS = 2S \tag{D.10}$$

□

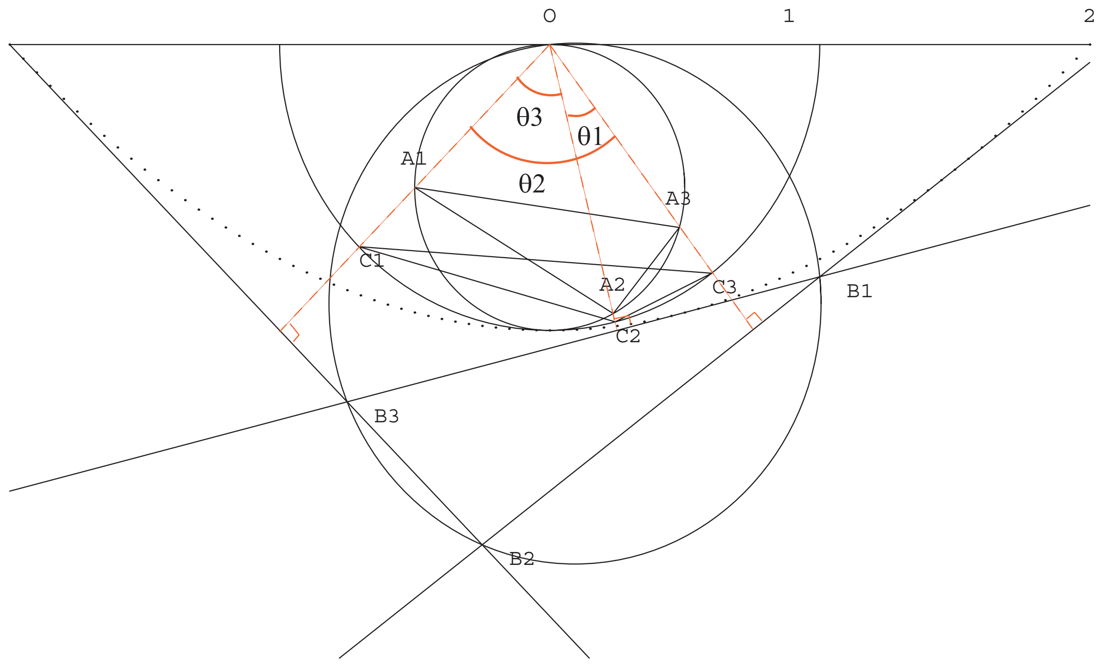


FIG. D.1 –

Bibliographie

[1] T. Flash A.A. Handzel. Affine invariant edge completion with affine geodesics. In *IEEE Workshop on variational and level set methods, Vancouver*, page 97, 2001.

[2] R.V. Ambartzumian. *Factorization calculus and geometric probability.* Cambridge University Press, 1990.

[3] J.M. Becker. Des méthodes géométriques pour l'imagerie, 1998. Thèse d'habilitation à diriger des recherches, Université de Saint-Etienne.

[4] J.M. Becker. A new geometrical approach for new hough-like transforms. In *SPIE Conference on Vision Geometry VII, San Diego*, volume 3454, pages 248–259, July 1998.

[5] J.M. Becker and S. Grousson. Points alignment and curves intersection in image processing : a duality framework. In *16th IMACS World Congress, Lausanne*, August 2000.

[6] M. Berger. *Géométrie.* Cedic/Fernand Nathan, 1979.

[7] W. Blaschke. *Vorlesungen über differentialgeometrie.Affine differentialgeometrie.* Springer, Berlin, 1923.

[8] K.Q. Brown. Voronoi diagrams from convex hulls. *Information Processing Letters*, 9 :223–228, 1979.

[9] S. Buchin. *Affine Differential geometry.* Science Press, Beijing, Chine, 1984.

[10] E. Cartan. *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann.* Gauthier-Villars, 1963.

[11] M. Chasles. *Traité de géométrie supérieure.* Gauthier-Villars, 1880.

[12] J.L. Coolidge. *Treatise on the circle and the sphere.* Oxford, 1916.

[13] Crofton. Probability, encyclopedia britannica. 1885.

[14] G.B. Dantzig. *Linear Programming and Extensions.* Princeton University Press, Princeton, 1963.

[15] J. W. Demmel. *Applied numerical linear algebra.* siam, 1997.

[16] R. O. Duda and P. E. Hart. Use of the hough transform to detect lines and curves in pictures. In *Proc. ACM*, pages 11–15, 1972.

[17] A. Tannenbaum E. Callabi, P.J. Olver. Affine geometry, curve flows and invariant numerical approximation. Technical report, School of Mathematics, University of Minnesota. www.math.umn.edu/ olver/af.ps, 1998.

[18] P.A. Schirokow et A.P. Schirokow. *Affine DifferentialGeometrie*. Teubner, Leipzig, 1962.

[19] O. Faugeras. *Three-Dimensional Computer Vision, A Geometric Viewpoint*. The MIT Press, 1993.

[20] L. Félix. *Exposé moderne des mathématiques élémentaires*. Dunod, 1962.

[21] S.J. Fortune. A sweepline algorithm for voronoï diagrams. *Algorithmica*, 2 :153–177, 1987.

[22] R.B. Gardner and G.R. Wilkens. The fundamental theorems of curves and hypersurfaces in centro-affine geometry. *Bull. Belg. Math. Soc.*, 4 :379–401, 1997.

[23] M. Gavrilova and J. Rokne. An efficient algorithm for the construction of the power diagram from the voronoï diagram in the plane. *International Journal of Computer Mathematics*, 61 :49–61, 1997.

[24] P. K. Ghosh and K. Vinod Kumar. Support function representation of convex bodies, its application in geometric computing, and some related representations. *Computer Vision and Image Understanding*, 72(3) :379–403, 1998.

[25] J.M. Becker S. Grousson and D. Coltuc. From hough transform to integral geometry. In *IGARSS, Toronto*, June 2002.

[26] J.M. Becker S. Grousson and D. Guieu. Space of circles : its applications in image processing. In *SPIE Congress, Vision Geometry IX, San Diego*, volume 4117, July 2000.

[27] C. Davis B. Grunbaum and F.A. Sherk. *The Geometric Vein*. Springer, 1981.

[28] H.W. Guggenheimer. *Applicable Geometry, Global and Local Convexity*. R.E. Krieger Pub. Co, 1977.

[29] C. E. Hann. *Recognising two planar objects under a projective transformation*. PhD thesis, University of Canterbury, New Zealand, February 2001.

[30] P.V.C. Hough. Method and means for recognizing complex patterns, 1962. Brevet.

[31] M. Jourlin and B. Laget. A model for logarithmic image processing. *J. Microscopy*, 149(1) :21–35, January 1988.

[32] M.J. Kaiser. Crystals, gauges, pedals and polars. *Mathematical and Computer Modelling*, 30 :201–232, 1999.

[33] R. Kimmel. Invariant framework for differential affine signatures. Technical report, Technion-Israel Institute of Technology, Israel, August 1995. EE PUB No. 983.

[34] I. Fillère M.J. Labouré and J.M. Becker. Shape study with hough and radon transforms. In *SPIE Conference on Vision Geometry VII, San Diego*, volume 3454, July 1998.

[35] M. van Kreveld M. Overmars O. Schwarzkopf M. de Berg. *Computational Geometry, Algorithms and Applications*. Springer, 2000.

[36] H. Maitre. Un panorama de la transformation de hough. *Traitement du Signal*, 2 :305–317, 1985.

[37] E. Lutton H. Maître and J. Lopez-Krahe. Contribution to the determination of vanishing points using hough transform. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 16 :430–438, April 1994.

[38] N. Megiddo. Linear-time algorithms for linear programming in R^3 and related problems. *SIAM Journal of Computing*, 12(4) :759–776, November 1983.

[39] O. Devillers S. Meiser and M. Teillaud. The space of spheres, a geometric tool to unify duality results on voronoi diagrams. Technical Report RR-1620, INRIA, February 1992.

[40] M. Mihaileanu. *Geometrie analitica, projectiva si diferentiala. complemente.* editura didactica, Bucarest, 1972.

[41] C.F. Olson. Constrained hough transforms for curve detection. *Computer Vision and Image Understanding : CVIU*, 73(3) :329–345, March 1999.

[42] E. Senetal K. H. Parshall and F. Jongmans. Nineteenth century developments in geometric probability : J.j. sylvester, m. w. crofton, j.e. barbier, and j. bertrand. *Arch. Hist. Exact Sci.*, 55 :501–524, 2001.

[43] D. Pedoe. *Geometry, a comprehensive course.* Dover, 1970.

[44] R.E. Pfiefer and C. van Hooke. Circles, vectors, and linear algebra. *Mathematics magazine*, pages 75–86, 1993.

[45] A. Santalo. *Integral Geometry and Geometry Probability.* Cambridge University Press, 2002.

[46] W.K. Schief. Hyperbolic surfaces in centro-affine geometry. integrability and discretization. *Chaos, Solitons and Fractals*, 11 :97–106, 2000.

[47] J.C. Sidler. *Géométrie projective, Cours, problèmes classiques et exercices résolus.* InterEditions, 1993.

[48] M.I. Stoka. Géométrie intégrale. In *Mémorial des Sciences Mathématiques*, volume 165, 1968.

[49] G. Strang. *Introduction to Applied Mathematics.* Wellesley-Cambridge Press, Wellesley, MA, USA, 1986.

[50] O. Strauss. Use the fuzzy hough transform towards reduction of the precision/uncertainty duality. *Pattern recognition*, 32 :1911–1922, 1999.

[51] P. Tagliarino. De l'étude de la transformée de hough et du contraste. vers le choix automatisé d'une séquence de traitement d'image, 1989. Thèse, Université de Saint-Etienne.

[52] A. Llebaria A. Thernissien and P. Lamy. Projective transform techniques to reconstruct the 3d structure and the temporal evolution of solar polar plumes. In *ASP Conf. Ser., San Francisco*, volume 238, 2001.

[53] L.K. Tutaëv. Lines and surfaces in three dimensional affine space. Technical report, Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem, 1964.

[54] S. van Huffel and Hongyuan Zha. *Handbook of Statistics, The Total Least Squares Problem*, volume 9. Elsevier Science Publishers, 1993.

[55] G. Voronoï. Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques, deuxième mémoire. *J. Reine Angew. Math.*, 134 :198–287, 1908.

[56] E.J. Wilczynski. *Projective differential geometry of curves and ruled surfaces.* Teubner, Leipzig, 1906.

[57] G. R. Wilkens. Remembering the mathematics of robert brown gardner. In *Symposia in Pure Mathematics*, volume 64. American Mathematical Society, 1999.

Table des matières

Index